START MATHEMATIK-STAFFEL 2010

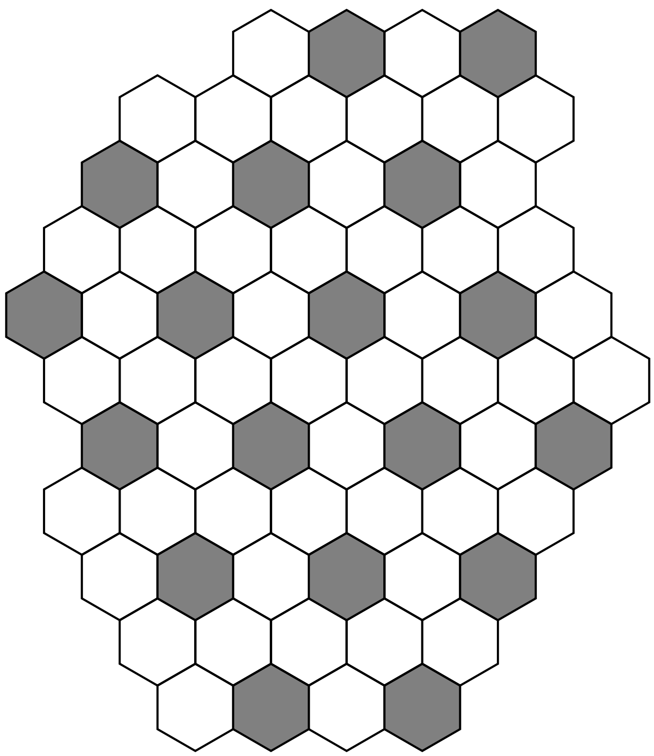
Ihr habt 60 Minuten Zeit für 20 Aufgaben.

Die Gesamtzahl der zu erreichenden Punkte ist 500.

1 (20 Punkte)

Eine Pflasterung

In der Abbildung siehst du einen Ausschnitt einer Pflasterung. Das ganze Pflaster ist ein regelmäßiges Sechseck, wobei jede Sechseckseite aus genau 10 weißen Steinen besteht.



Wie viele schwarze Steine enthält das ganze Pflaster?

2 (30 Punkte)

Ein Zahlenfries

Die unten stehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Frieses, das aus versetzten Zeilen von ganzen Zahlen besteht. In der obersten und untersten Zeile stehen nur Einsen, die übrigen Zahlen des Frieses sind nur zum Teil bekannt.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
& 1 & & 2 & & 4 & & ? & & ? & & ? & & ? & \\
& & 1 & & 7 & & ? & & ? & & ? & & ? & & \\
& \boxed{1} & & ? & & ? & & ? & & ? & & \diamondsuit & & ? & \\
1 & & ? & & ? & & \clubsuit & & ? & & ? & & ? & & \\
& 1 & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Du kannst das Fries mit Hilfe der folgenden Regel vervollständigen: Für vier Zahlen a, b, c und d, die wie folgt angeordnet sind

$$
\begin{array}{ccc}
& a & \\
b & & c \\
& d &
\end{array}
$$

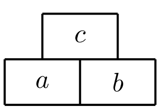
muss gelten $b \cdot c = a \cdot d + 1$. Du wirst merken, dass an der Stelle des $\clubsuit$ eine 5 und an der Stelle des $\diamondsuit$ eine 3 stehen muss.

Welche Zahl steht 150 *Stellen rechts von der markierten* 1*?*

$\boxed{3}$ (20 Punkte)

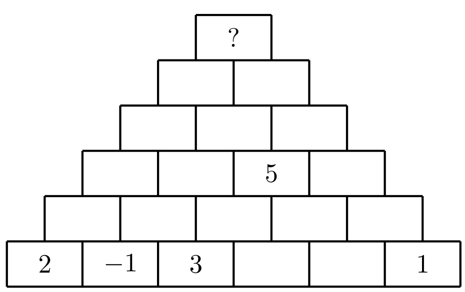
Eine Zahlenmauer

Eine Zahlenmauer besteht aus versetzten Steinen. Auf jeden Stein (abgesehen von den Steinen der untersten Reihe) soll nun eine Zahl geschrieben werden und zwar so, dass sie die Summe der Zahlen der beiden Steine ist, auf denen der betrachtete Stein liegt.



dann muss $c = a + b$ sein.

Auf fünf Steinen der folgenden Zahlenmauer steht schon eine Zahl.



Welche Zahl muss auf dem obersten Stein stehen?

$\boxed{4}$ (20 Punkte)

Das Fünffache

Eine sechsstellige natürliche Zahl n hat (im Dezimalsystem) als letzte Ziffer (rechts) eine 7. Streicht man diese letzte Ziffer 7 und setzt sie als erste Ziffer vor die anderen Ziffern, so erhält man das Fünffache der Zahl n.

Welche Zahl ist gemeint?

$\boxed{5}$ (30 Punkte)

Bezahlen

Einen Betrag von 210 € kannst du auf drei verschiedene Arten bezahlen, wenn du nur Scheine von 20 €, 50 € und 100 € zur Verfügung hast, nämlich als $100 + 50 + 3 \times 20$, als $3 \times 50 + 3 \times 20$, und als $50 + 8 \times 20$.

Auf wie viele Arten kannst du einen Betrag von 2010 € bezahlen, wenn du nur Scheine von 20 €, 50 € und 100 € zur Verfügung hast?

$\boxed{6}$ (20 Punkte)

Die Quadratzahl

Eine (im Zehnersystem) sechsstellige Zahl n beginnt mit $19\ldots$ und endet auf $\ldots 36$. Weiter ist bekannt, dass sie das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Welche Zahl ist n?

$\boxed{7}$ (20 Punkte)

Der Gleichstand

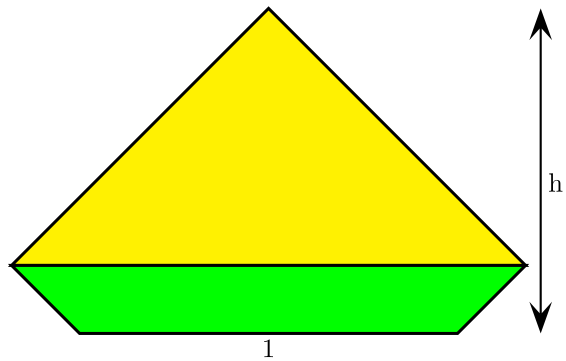
Um den Planeten Weitweg drehen sich drei Monde.
Der erste hat eine Umlaufzeit von 101 Stunden.
Der zweite hat eine Umlaufzeit von 203 Stunden.
Der dritte hat eine Umlaufzeit von 306 Stunden.
Zu Beginn der Zeitrechnung bildeten die drei Monde einen Gleichstand in dem Sinne, dass sie mit dem Planeten zusammen auf einer Geraden lagen. Die Bewohner von Weitweg haben ihr Jahr in 400 Tage und ihren Tag in 25 Stunden eingeteilt. Beim nächsten Gleichstand der drei Monde erwarten die Astrologen ein wichtiges Ereignis.

In welchem Jahr ist der nächste Gleichstand?

$\boxed{8}$ (30 Punkte)

Das Fünfeck

Wir betrachten ein Fünfeck, das aus einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck und einem Trapez besteht. Das Trapez hat Winkel von 45° und 135° (s. Abb.). Der Flächeninhalt des Dreiecks ist hierbei dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Trapezes. Die Grundseite des Trapezes hat die Länge 1.



Wie groß ist die Höhe h des Fünfecks?

$\boxed{9}$ (20 Punkte)

Das Turnier

Bei einem mehrtägigen Turnier, das jedoch nicht länger als 2 Wochen dauert, werden die Medaillen während der n Tage nach folgendem Modus vergeben.

- Am 1. Tag wird eine Medaille und $\frac{1}{6}$ der noch vorhandenen Medaillen verliehen.
- Am 2. Tag werden zwei Medaillen und $\frac{1}{6}$ der dann noch vorhandenen Medaillen verliehen.
- Am 3. Tag werden drei Medaillen und $\frac{1}{6}$ der dann noch vorhandenen Medaillen verliehen.

usw.

Schließlich werden am letzten Tag genau n Medaillen verliehen, wobei keine Medaillen übrig bleiben.

Wie viele Medaillen wurden insgesamt verliehen?

Natürlich kann man Medaillen nicht teilen!

$\boxed{10}$ (30 Punkte)

Viele Teiler

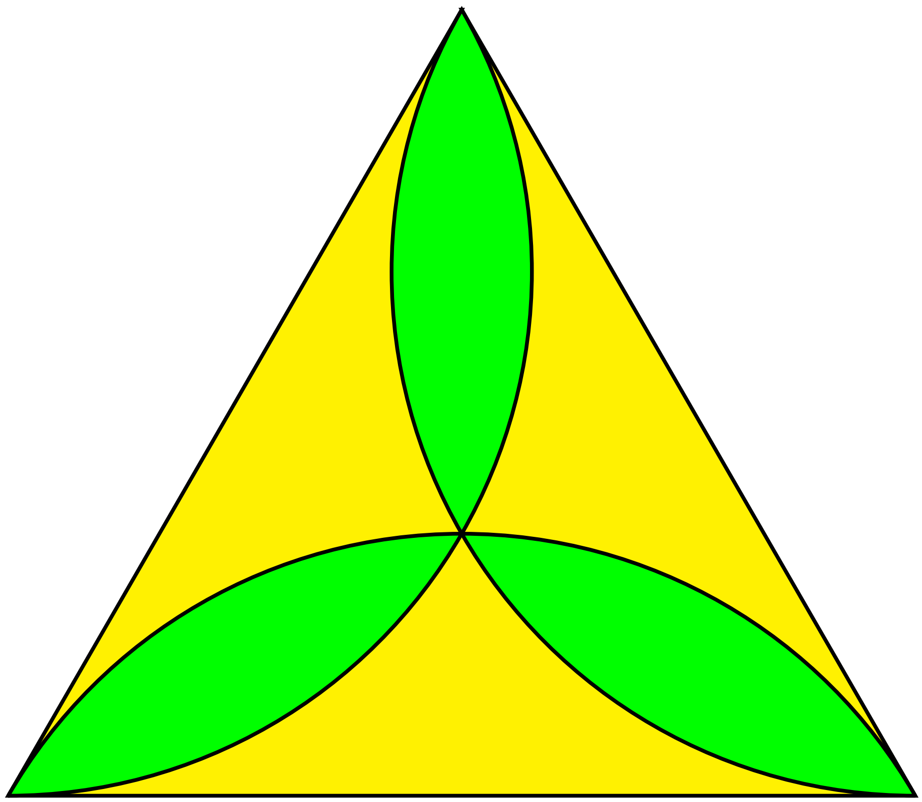
Die natürliche Zahl 20 hat 6 Teiler, nämlich $1, 2, 4, 5, 10$ und 20.

Welches ist das kleinste Vielfache von 22 *mit genau* 22 *Teilern?*

$\boxed{11}$ (30 Punkte)

Das Kleeblatt

Die Blattspitzen eines Kleeblatts bilden ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{6}$. Die Blätter werden durch Kreisbögen berandet, die jeweils durch zwei Ecken und den Mittelpunkt des Dreiecks verlaufen. (s. Abbildung).

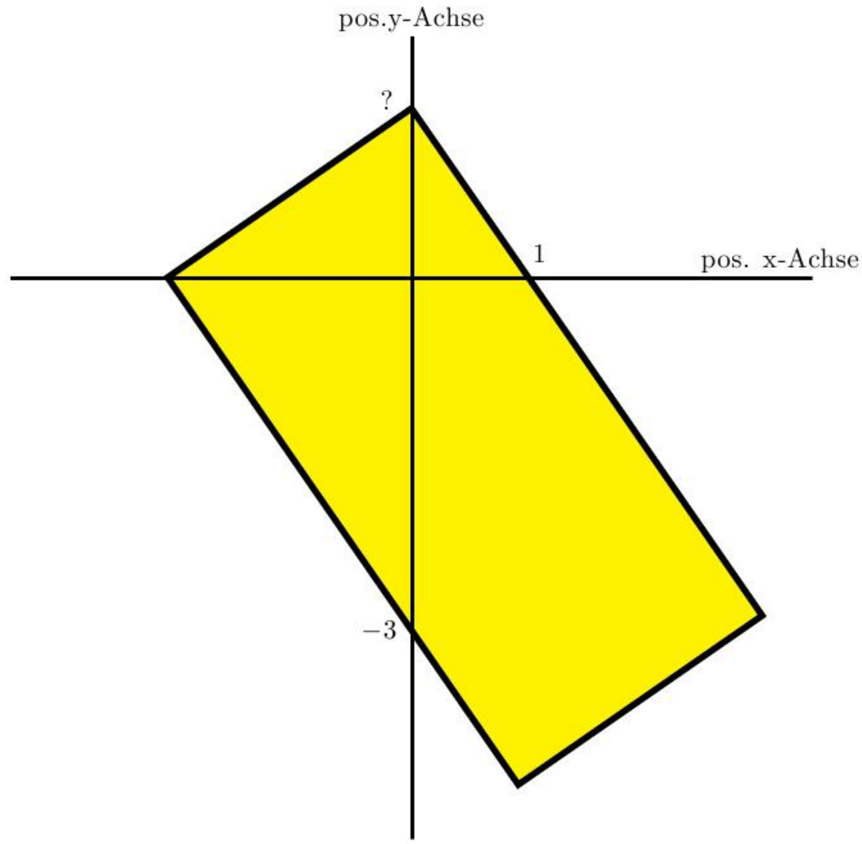


Wie groß ist die Oberfläche des Kleeblattes?

$\boxed{12}$ (20 Punkte)

Das Rechteck

Ein Rechteck liegt in einem (rechtwinkligen) Koordinatensystem mit einer Ecke auf der positiven y-Achse und einer Ecke auf der negativen x-Achse. Es schneidet die negative y-Achse im Punkt (0|–3) und die positive x-Achse im Punkt (1|0).



Wo schneidet das Rechteck die positive y-Achse?

$\boxed{13}$ (20 Punkte)

Zwei Zahlen

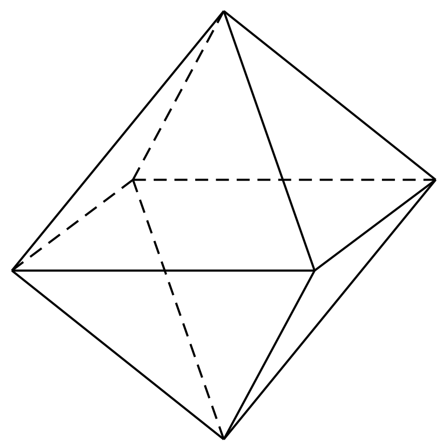
Gesucht sind zwei (im Dezimalsystem) zweistellige natürliche Zahlen. Jede der folgenden Aussagen betrifft mindestens eine dieser Zahlen. Nicht alle Aussagen beziehen sich auf dieselbe Zahl.

- Die Quersumme ist 10 und die Zahl ist die Differenz zweier Dreierpotenzen.
- Die Quersumme ist 10 und die Zahl ist die Summe zweier Dreierpotenzen.
- Die Quersumme ist 10.
- Die Zahl ist ein Vielfaches von 5 plus 2 und ein Vielfaches von 3 plus 1.
- Die Zahl ist ein Vielfaches von 5 minus 2 und ein Vielfaches von 3 plus 1.

Welche Zahlen sind es?

$\boxed{14}$ (30 Punkte)

Der Würfel
Ein üblicher Würfel hat die Eigenschaft, dass die Summe der Augenzahlen zweier gegenüberliegender Seitenflächen 7 ist. Also müssen 1 und 6, 2 und 5 wie auch 3 und 4 gegenüberliegen. Also gibt es nur **zwei** Arten von Würfeln (abgesehen von der Größe, der Farbe, dem Material usw.).
Verteilen wir auf die Seitenflächen eines regelmäßigen Oktaeders die Augenzahlen 1 bis 8 mit der Bedingung, dass die Summe der Augenzahlen zweier gegenüberliegender Seitenflächen stets 9 ist, erhalten wir einen Oktaederwürfel.

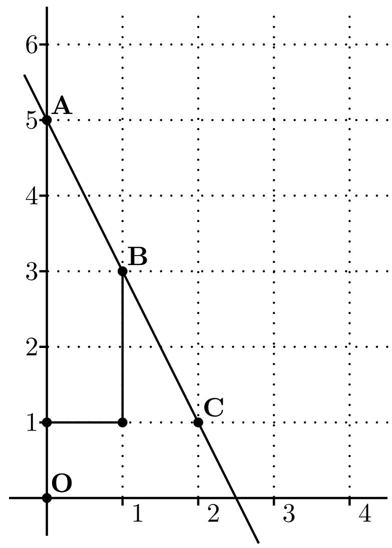


Wie viele verschiedene solcher Oktaederwürfel gibt es?

$\boxed{15}$ (20 Punkte)
Die Wurzel
Gesucht ist eine natürliche Zahl n zwischen 40000 und 41000, deren Quadratwurzel in Dezimaldarstellung hinter dem Komma mit der Ziffernfolge 753 beginnt.

Gib n an!

$\boxed{16}$ (30 Punkte)
Kürzeste Wege
Ein *kürzester Weg auf einem Gitternetz* erlaubt nur Schritte der Länge 1 nach rechts oder nach oben auf den Gitternetzlinien, wobei Anfangs- wie auch Endpunkt (wie auch alle anderen zu betrachtenden Punkte) ganzzahlige, nichtnegative Koordinaten haben. In der Abbildung ist **ein** Weg von O nach B eingezeichnet, er hat die Länge 4.
Auf der eingezeichneten Geraden $2x + y = 5$ sind A, B und C die einzigen Punkte mit ganzzahligen, nichtnegativen Koordinaten. Nach A gibt es einen, nach B vier und nach C drei kürzeste Gitternetzwege, also gibt es **insgesamt** $1+4+3 = 8$ kürzeste Gitternetzwege vom Ursprung O zur Geraden $2x + y = 5$.
Es gibt 987 kürzeste Wege zur Geraden $2x + y = 15$ und 2584 derartige Wege zur Geraden $2x + y = 17$.



Wie viele kürzeste Wege gibt es zur Geraden $2x + y = 19$?

$\boxed{17}$ (30 Punkte)

Spiegelzahlen

Zu einer (im Dezimalsystem gegebenen) natürlichen Zahl n, die kein Vielfaches von 10 ist, bilden wir die Spiegelzahl $S(n)$, indem wir die Reihenfolge der Ziffern umkehren. So ist $S(1458) = 8541$.

Wir nennen zwei natürliche Zahlen n und m **spiegelverwandt**, wenn das Produkt von n und m gleich ist dem Produkt der Spiegelzahlen, d.h. wenn $n \cdot m = S(n) \cdot S(m)$ gilt.

Bestimme zur Zahl 6024 zwei spiegelverwandte Zahlen.

$\boxed{18}$ (20 Punkte)

Alle Ziffern

Die Zahl 36 hat die Teiler $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. Somit sind $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ die vorkommenden Einerziffern in der Teilermenge von 36, die Ziffern $0, 5, 7$ kommen als Einerziffern nicht vor.

Welches ist die kleinste natürliche Zahl, deren Teiler sämtliche Ziffern des Dezimalsystems als Einerziffern, also $0, 1, 2, \ldots, 9$ enthalten?

$\boxed{19}$ (30 Punkte)

Die Tafel

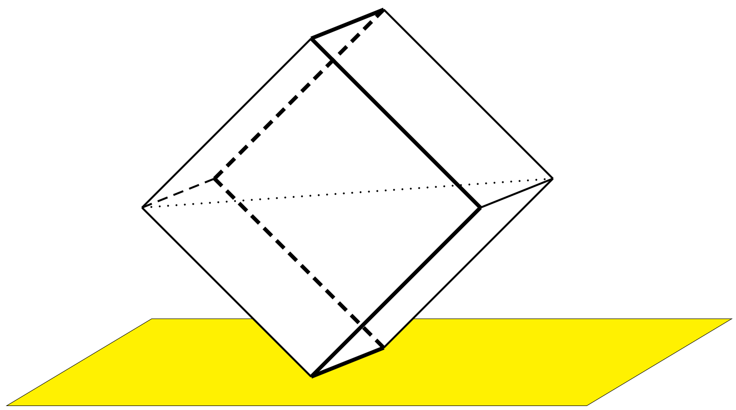
Auf einer Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis 100. Zwei dieser Zahlen- nennen wir sie a und b - werden zufällig ausgewählt und gelöscht. Stattdessen wird die Zahl $a+b+a \cdot b$ auf die Tafel geschrieben, so dass jetzt nur noch 99 Zahlen an der Tafel stehen. Mit diesen wird ebenso verfahren. Nach 99 Runden steht nur noch eine Zahl auf der Tafel.

Welches sind die letzten beiden Ziffern dieser Zahl?

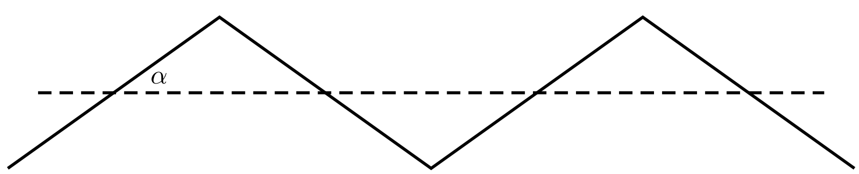
$\boxed{20}$ (30 Punkte)

Der wandernde Würfel

Wir halten einen Würfel mit Daumen und Zeigefinger an den zwei Ecken, die auf der eingezeichneten Raumdiagonalen liegen, fest. Eine Kante des Würfels liegt hierbei auf der Tafel.



Wir lassen den Würfel so über den Tisch wandern, dass er nacheinander mit einer der fett markierten Kanten auf dem Tisch liegt. Hierbei dreht sich der Würfel um die Raumdiagonale. Wir bewegen den Würfel nun so, dass die Raumdiagonale parallel zur Tafel stets in dieselbe Richtung zeigt. Der Weg auf der Tafel sieht dann von oben wie folgt aus:



Die Zickzacklinie wird durch die Abdrücke der Kanten, mit denen der Würfel die Tafel berührt, gebildet. Die gestrichelte Linie zeigt in die Richtung, in die der Würfel sich bewegt. Der Winkel zwischen den Strecken der Zickzacklinie und der gestrichelten Linie heißt α.

Bestimme wahlweise $\sin(\alpha)$*,* $\cos(\alpha)$ *oder* $\tan(\alpha)$*.*

MATHEMATIK-STAFFEL 2010

Lösungen

1

Wir zählen die schwarzen Steine in jeder Reihe des Sechseckes:
Reihe 1 (und Reihe 19) besteht aus 10 weißen Steinen.
Reihe 2 (und Reihe 18) besteht aus 11 Steinen, 6 Weißen + 5 Schwarzen.
Reihe 3 (und Reihe 17) besteht aus 12 weißen Steinen.
Reihe 4 (und Reihe 16) besteht aus 13 Steinen, 7 Weißen + 6 Schwarzen.
Reihe 5 (und Reihe 15) besteht aus 14 weißen Steinen.
Reihe 6 (und Reihe 14) besteht aus 15 Steinen, 8 Weißen + 7 Schwarzen.
Reihe 7 (und Reihe 13) besteht aus 16 weißen Steinen.
Reihe 8 (und Reihe 12) besteht aus 17 Steinen, 9 Weißen + 8 Schwarzen.
Reihe 9 (und Reihe 11) besteht aus 18 weißen Steinen.
Reihe 10 besteht aus 19 Steinen, 10 Weißen + 9 Schwarzen.
Zusammengenommen enthält das Pflaster $5+6+7+8+9+8+7+6+5 = 61$ schwarze Steine.

2

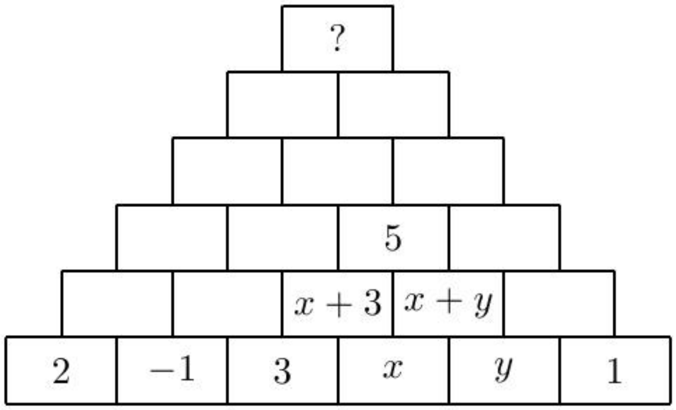
Wir können die fehlenden Zahlen im Fries von links nach rechts und Spalte für Spalte eintragen und erhalten:

1		1		1		1		1		1		1		1		1		
	1		2		4		2		1		3		2		3		1	
		1		7		7		1		2		5		5		2		1
	$\boxed{1}$		3		12		3		1		3		12		3		$\boxed{1}$	
1		2		5		5		2		1		7		7		1		
	1		3		2		3		1		2		4		2		1	
1		1		1		1		1		1		1		1		1		

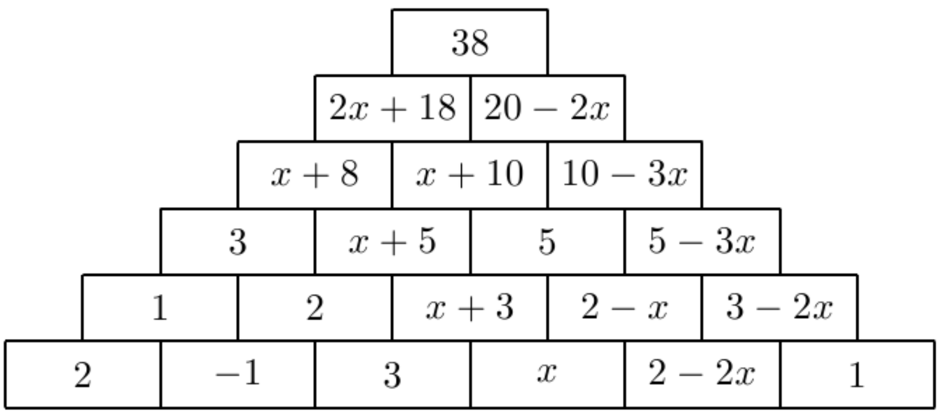
Der linke Rand des so ausgefüllten Fries entspricht nun dem rechten Rand, sodass sich das Fries nach rechts ohne neuen Rechenaufwand beliebig erweitern lässt. Jede Zahl im Fries taucht dabei 8 Stellen weiter rechts erneut auf. So steht $144 = 18 \cdot 8$ Stellen rechts von der markierten 1 wiederum die 1 und $150 = 144 + 6$ Stellen rechts von der markierten 1 steht die 12.
Übringens verstecken sich im obigen Fries verschiedene Spiegel- und Schiefsymmetrien.

3

Wenn wir die noch freien Steine in der untersten Mauerreihe mit x und y beschriften, dann ergibt sich:



Also muss gelten, dass $(x+3)+(x+y)=5$ und somit $y=2-2x$ ist. Ersetzen wir y in der Zahlenmauer durch $2-2x$ und führen die weiteren Rechenschritte durch, sehen wir, dass die Zahl auf dem obersten Stein nicht von x abhängt. Sie muss 38 lauten.



$\boxed{4}$

Sei x die Zahl, die aus den ersten fünf Ziffern der Zahl n besteht, sodass $n=10x+7$ und $5n=700000+x$ gilt. Dann ist $50x+35=700000+x$ und daher $49x=699965$ bzw. $x=14285$. Daraus folgt $n=142757$.

$\boxed{5}$

Um den geforderten Betrag zu bezahlen, benötigen wir zumindest drei Scheine a 20 Euro und einen Schein a 50 Euro. Nun bleiben noch 1900 Euro in 20 Euro, 50 Euro und 100 Euro Scheinen zu bezahlen. Die Anzahl der dazu benötigten 20 Euro Scheine muss durch fünf teilbar sein, die Anzahl der benötigten 50 Euro Scheine muss durch zwei teilbar sein. Beschreiben wir einen 100 Euro Schein mit x, je zwei 50 Euro Scheine mit y und je fünf 20 Euro Scheine mit z, dann muss gelten: $x+y+z=19$ mit $x,y,z\geq 0$. Für $z=0$ ergeben sich 20 Möglichkeiten, nämlich $x=0,1,2,\ldots,19$. Für $z=1$ sind es 19 Möglichkeiten, nämlich $x=0,1,2,\ldots,18$ und so weiter. Zusammengenommen ergeben sich somit $20+19+18+\cdots+2+1=(20+1)+(19+2)+\cdots+(11+10)=10\cdot 21=210$ Möglichkeiten.

$\boxed{6}$
Wir schreiben n als k^2, wobei k eine natürliche Zahl ist. Falls $k \leq 430$, dann ist $k^2 \leq 430^2 = 184900$ und kann nicht die gesuchte Zahl sein. Falls $k \geq 450$, dann ist $k^2 \geq 450^2 = 202500$ und kann ebenso nicht die gesuchte Zahl sein. Also ist k dreistellig und beginnt mit den Ziffern 43 oder 44. Wenn k mit der Ziffer 9 endet, also $k = 10j + 9$ für $j = 43$ oder $j = 44$, dann ist $k^2 = 100j^2 + 180j + 81$ und endet daher mit der Ziffer 1. Nach Aufgabenstellung soll $k^2 = n$ jedoch mit der Ziffer 6 enden. Falls k mit der Ziffer 2 oder 8 endet, dann endet k^2 mit der Ziffer 4. Wenn k mit der Ziffer 3 oder 7 endet, dann endet k^2 mit der Ziffer 9. Falls schließlich k mit der Ziffer 0 oder 5 endet, dann tut k^2 dies auch. Somit bleiben für k nur die Zahlen 434, 436, 444 und 446 übrig. Eine kleine Rechnung liefert $k = 444$ und $n = 197136$.

$\boxed{7}$
Nach t Stunden hat der erste Mond $\frac{t}{101}$ Umläufe vollendet, der zweite Mond $\frac{t}{203}$ und der dritte Mond $\frac{t}{306}$. Es liegt Gleichstand vor, wenn sich diese Werte nur um eine natürliche Zahl unterscheiden, also wenn gilt: $\frac{t}{101} = a + k, \frac{t}{203} = a + l, \frac{t}{306} = a + m$ für natürliche Zahlen k, l, m und $0 \leq a < 1$. Hieraus folgt $k - l = \frac{102}{101 \cdot 203} t$ sowie $k - m = \frac{205}{101 \cdot 306} t$ und daher $\frac{k-l}{k-m} = \frac{102 \cdot 306}{203 \cdot 205}$. Da der letzte Bruch nicht mehr gekürzt werden kann, gibt es eine natürliche Zahl j mit $k - l = 120 \cdot 306j$ und $k - m = 203 \cdot 205j$, sodass $t = 101 \cdot 203 \cdot 306j$. Nach dem ersten Gleichstand zu Beginn der Zeitrechnung (für $j = 0$) wird der nächste Gleichstand für $j = 1$, also nach $t = 101 \cdot 203 \cdot 306 = 6273918$ Stunden erreicht. Dies sind 250956 Tage und 18 Stunden oder 627 Jahre, 156 Tage und 18 Stunden. Der nächste Gleichstand wird daher im Jahr 628 erreicht.
Bemerkung: Natürlich geht es auch kürzer. Das kgV der 3 Zahlen ist durch $400 \cdot 25$ zu teilen. Da diese teilerfremd sind hat man $\frac{101 \cdot 203 \cdot 306}{400 \cdot 25} = 627,39\ldots$ Jahre. Somit ist Gleichstand im Jahr 628.

$\boxed{8}$
Nenne die Länge der Hypothenuse des Dreieckes x. Dann beschreibt $\frac{1}{2}x$ die Länge der Höhe des Dreieckes und $\frac{1}{4}x^2$ dessen Flächeninhalt. Die an beiden Seiten vom Trapez abstehenden Dreiecke sind gleichschenkelig und rechtwinklig, wobei $\frac{1}{2}(x-1)$ die Länge der Katheten dieses Dreieckes und somit zugleich die Höhe des Trapezes beschreibt. Als Flächeninhalt des Trapezes erhalten wir $\frac{1}{4}(x^2-1)$. Nach Aufgabenstellung folgt: $\frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}(x^2-1)$, also $2x^2 = 3$ und somit $x = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Für die Höhe h ergibt sich: $h = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

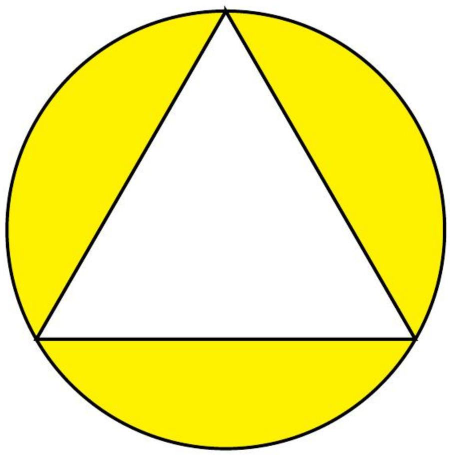
$\boxed{9}$
Sei m_k die Anzahl der Medaillen, die am k-ten Tag verteilt werden. Dann muss gelten: $m_1 = m, m_2 = (m_1 - 1) - \frac{1}{6}(m_1 - 1) = \frac{5}{6}(m_1 - 1), m_3 = (m_2 - 2) - \frac{1}{6}(m_2 - 2) = \frac{5}{6}(m_2 - 2), \ldots, m_k = (m_{k-1} - (k-1)) - \frac{1}{6}(m_{k-1} - (k-1)) = \frac{5}{6}(m_{k-1} - (k-1)), \ldots, m_n = \frac{5}{6}(m_{n-1} - (n-1)) = n$. Die $(m_k - k)$ müssen Vielfache von 6 sein, außerdem ist die Folge m_k streng monoton fallend. Nach Aufgabenstellung kann n nur 5 oder 10 sein. $n = 5$ liefert $m_4 = 10, m_3 = 15, m_2 = 20, m_1 = 25 = m$, was das Ergebnis ist. $n = 10$ ist nicht möglich, da dies auf $m_9 = 21$ und dann auf $m_8 = \frac{6}{5} \cdot 21 + 8$ führen würde, was nicht mehr ganzzahlig ist.

$\boxed{10}$

Es ist $22 = 2 \cdot 11$. Eine Zahl n mit 22 Teilern hat die Primfaktorzerlegung $n = p_1^1 \cdot p_2^{10}$. Die Teilermenge von n, $T(n)$, ist dann nämlich gegeben durch $T(n) = \{p_1^0 \cdot p_2^0, p_1^0 \cdot p_2^1, p_1^0 \cdot p_2^2, \ldots, p_1^0 \cdot p_2^{10}, p_1^1 \cdot p_2^0, p_1^1 \cdot p_2^1, p_1^1 \cdot p_2^2, \ldots, p_1^1 \cdot p_2^{10}\}$. Die Vielfachen von 22 mit 22 Teilern können also nur von der Form $2^1 \cdot 11^{10}$ oder $2^{10} \cdot 11^1$ sein, wobei klar ist, dass letztere Zahl die kleinere ist.

$\boxed{11}$

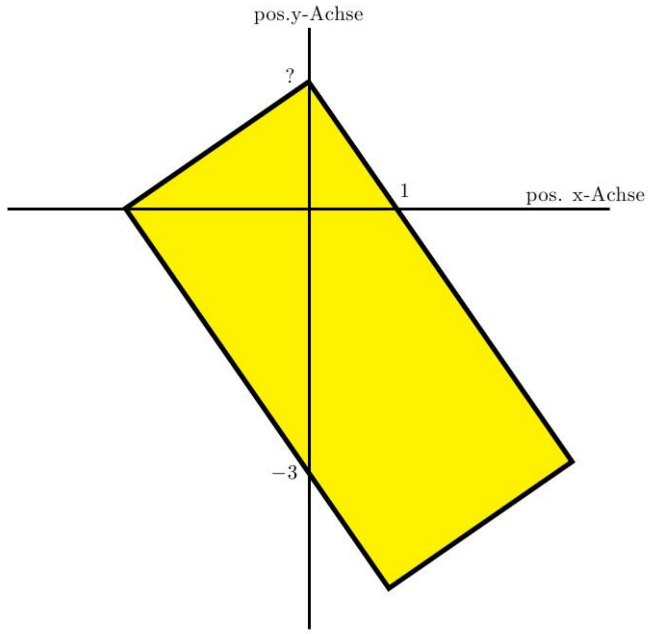
Wir können die vorliegende Figur entstehen lassen, indem wir einem Kreis das geforderte gleichseitige Dreieck einbeschreiben



und dann die drei äußeren Kreissegmente nach innen klappen. Dabei werden die Blätter des Kleeblattes je zweimal bedeckt (und somit auch das Kleeblatt selbst), der Rest des Dreieckes nur einfach. Wir sehen: Fläche (heller Teil) $+2\times$ Fläche (Kleeblatt) = Fläche (abstehender Kreissegmente) = Fläche (Kreis) $-$ Fläche (Dreieck). Außerdem gilt: Fläche (heller Teil) + Fläche (Kleeblatt) = Fläche (Dreieck). Es folgt, dass Fläche (Kleeblatt) = Fläche (Kreis) $-2\times$ Fläche (Dreieck). Nun beträgt die Länge der Höhe des Dreieckes $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ und dieses hat einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Der Radius des ursprünglichen Kreises entspricht $\frac{2}{3}$ der Höhe des Dreieckes und hat daher die Länge $\sqrt{2}$. Als Flächeninhalt des Kreises ergibt sich damit $\pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$ und als Flächeninhalt des Kleeblattes $2\pi - 3\sqrt{3}$.

$\boxed{12}$

Wie benennen die Schnittpunkte der Rechteckseiten mit den Koordinatenachsen wie in der nachfolgenden Abbildung angegeben.



Nach Aufgabenstellung hat OA die Länge 1. Schreibe b für die Länge von OB. Da die Dreiecke OAB und OBC ähnlich sind, folgt, dass die Länge von OC b^2 beträgt. Ebenso sind die Dreiecke OBC und OCD ähnlich, sodass OD eine Länge von b^3 hat. Somit gilt nach Aufgabenstellung $b^3 = 3$, also $b = \sqrt[3]{3}$. Das Rechteck schneidet die positive y-Achse im Punkt $(0 \mid \sqrt[3]{3})$.

$\boxed{13}$

Die Dreierpotenzen sind: $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, \ldots$. Die Summen von zwei Dreierpotenzen sind somit: $2, 9, 16, 28, 35, 54, 65, 72, 91, \ldots$. Hiervon haben allein 28 und 91 die Quersumme 10. Die (positiven) Differenzen zweier Quersummen sind: $7, 19, 26, 37, 56, 61, 63, 91, 98, \ldots$. Weitere Differenzen brauchen wir nicht zu betrachten, da schon $343 - 216 > 100$, also nicht mehr zweistellig ist. Von diesen Zahlen haben $19, 37$ und 91 die Quersumme 10. Nur 28 erfüllt zusätzlich Aussage 5 und nur 37 zusätzlich Aussage 4. Also sind 28 und 37 die gesuchten Zahlen.

$\boxed{14}$

Betrachten wir zunächst die Seitenfläche mit der Augenzahl 1. Dieser liegt die Seitenfläche mit der Augenzahl 8 gegenüber. Von den übrigen Seitenflächen grenzen drei an jene mit der Augenzahl 1 und drei Weitere nicht. Die Seitenfläche mit der Augenzahl 2 gehört zu einer dieser beiden Gruppen, jene mit der Augenzahl 7 zu der Anderen. Nun kann man den Oktaederwürfel eindeutig so rotieren, dass die Seitenfläche mit der Augenzahl 1 im oberen Teil und die Seitenfläche mit der Augenzahl 2 oder 7 im unteren Teil sichtbar wird. Die Seitenfläche mit der Augenzahl 8 ist dabei nicht zu sehen. Für die Seitenfläche mit der Augenzahl 3 ergeben sich vier Möglichkeiten, wobei die Seitenfläche mit der Augenzahl 6 dadurch jeweils festgelegt ist. Schließlich bleiben für die Seitenfläche mit der Augenzahl

4 noch zwei Möglichkeiten, wobei jeweils die Seitenfläche mit der Augenzahl 5 gegenüber liegt. Insgesamt ergeben sich somit $2 \times 4 \times 2 = 16$ Möglichkeiten.

$\boxed{15}$

Sei $\sqrt{n} = x,753r$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $r < 10^{-3}$. Dies liefert $n = ((x + 0,753) + r)^2 = x^2 + 2 \cdot 0,753x + 0,753^2 + 2r \cdot (x + 0,753) + r^2$. Für $x = 200$ gilt $n = 40000 + 301,2 + 0,567009 + r \cdot 400,753 + r^2 = 40301,767009 + r \cdot (400,753 + r)$. Da $40302 - 40301,767 \dots = 0,23 \dots$ und $10^{-3} \cdot 400 = 0,4$ ist, ist ein r möglich, so dass ein ganzzahliger Wert das Ergebnis ist. Somit ist $n = 40302$ und $\sqrt{40302} = 200,753580 \dots$. (Dies ist übrigens der einzige Wert mit den gewünschten Nachkommazahlen zwischen 40000 und 41000.)

$\boxed{16}$

Um zum Punkt B (der Zeichnung) auf der Geraden $2x + y = 5$ zu gelangen, muss man entweder über den Punkt $(1|2)$ oder über den Punkt $(0|3)$ gehen und hat dann noch jeweils genau einen Schritt zu tun. Die Anzahl der Wege nach B ist also gleich der Summe der Wege über $(1|2)$ und $(0|3)$. $(1|2)$ liegt auf der Geraden $2x + y = 4$, $(0|3)$ auf der Geraden $2x + y = 3$. Bezeichne mit $W(n)$ die Anzahl der kürzesten Gitternetzwege zu den Gitterpunkten auf der Geraden $2x + y = n$. Dann gilt offensichtlich in Verallgemeinerung des Obigen die wichtige Rekursionsformel: $W(n) = W(n-1) + W(n-2)$. Offensichtlich ist $W(1) = 1$ und $W(2) = 2$. Aus diesen ‚Anfangsbedingungen' ergibt sich dann:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$W(n)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

n	16	17	18	19
$W(n)$	1597	2584	4181	6765

Natürlich brauchte man nicht alle diese Zahlen zu ermitteln. Da $W(15)$ und $W(17)$ vorgegeben sind, erhält man wegen $W(15) + W(16) = W(17) : 987 + W(16) = 2584$. Dies liefert $W(16) = 1597$ und dann $W(18)$ und $W(19)$. Die durch obige Rekursion definierten Zahlen sind die berühmten Fibonaccizahlen. (Mehr darüber z.B. in Wikipedia)

$\boxed{17}$

Wenn n und m spiegelverwandt sind, dann gilt $\frac{n}{S(n)} = \frac{S(m)}{m}$. Wenn also n spiegelverwandt ist zu 6024, dann ist $\frac{n}{S(n)} = \frac{4206}{6024} = \frac{701}{1004}$. Da der Bruch $\frac{701}{1004}$ vollständig gekürzt ist, gibt es eine natürliche Zahl j, sodass $n = 701j$ und $S(n) = 1004j$. Jetzt können wir für $j = 1, 2, 3 \dots$ ausprobieren, wann $1004j$ zur Spiegelzahl von $701j$ wird. Dies ist zum Beispiel der Fall für $j = 3, 6$ und 9. Es ergeben sich die zu 6024 spiegelverwandten Zahlen 2103, 4206 und 6309. Die nächsten Werte für j sind $33, 66, 99, 333, 666$, was die Spiegelzahlen $32133, 46266, 69399, 23343, 466866$ ergibt. Jedes $j = 33.....33$ ergibt eine zu 6024 spiegelverwandte Zahl.

$\boxed{18}$

Nenne die gesuchte Zahl n. Da 0 als Einerziffer in der Teilermenge von n enthalten sein soll, ist n durch zehn teilbar. Da 7 als Einerziffer in der Teilermenge von n enthalten sein soll, teilt eine der Zahlen $7, 17, 27, \dots$ oder deren Vielfache die Zahl n. Zusammengenommen teilt daher eine der Zahlen $70, 170, 270, \dots$ oder deren Vielfache die Zahl n. Als kleinste Möglichkeiten ergeben sich die Zahlen $70, 140, 170, 210$ und 270. Eine analoge Rechnung für die Einerziffer 9 liefert als kleinste Möglichkeiten für n die Zahlen $90, 180, 190$ und 270. Somit kann n nicht kleiner als 270 sein. Es zeigt sich jedoch, dass 270 die geforderte Bedingung erfüllt, da $\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270\}$ ihre Teilermenge ist.

$\boxed{19}$

Die letzten beiden Ziffern sind 99. Denn: Es ist $a+b+ab = (a+1)(b+1)-1$. Zwei Zahlen a und b werden also durch diese Zahl ersetzt. Löscht man jetzt eine dritte Zahl c wie auch diese Zahl, so ersetzt man diese durch $((a+1)(b+1)-1)+1)(c+1)-1 = (a+1)(b+1)(c+1)-1$. Löscht man die Zahlen $(a+1)(b+1)-1$ und $(c+1)(d+1)-1$ so sind diese zu ersetzen durch $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)-1$ usw. Da alle Zahlen von 1 bis 100 aufzubrauchen sind, erhält man zum Schluss: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 100 \cdot 101 - 1 = 101! - 1$. $101!$ enthält aber mindestens 2 Endnullen (wie viele genau?), hiervon 1 abgezogen liefert als letzte beiden Ziffern gerade 99.

$\boxed{20}$

Die gestrichelte Linie, welche die Bewegungsrichtung des Würfels angibt, und die Raumdiagonale des Würfels, welche gewährleistet, dass dieser in geforderter Weise die Linien auf der Tafel hinterlässt, bilden einen rechten Winkel. Daher können wir auch den Winkel β zwischen der Raumdiagonalen des Würfels und einer benachbarten Würfelkante bestimmen. Denn die Winkel α und β sind komplementär. Nenne die Länge einer Kante des Würfels L. Der Winkel β gehört zu einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen fehlende Kathete der Diagonalen einer Seitenfläche des Würfels entspricht und daher die Länge $L\sqrt{2}$ hat. Daraus folgt, dass $tan(\beta) = \frac{L\sqrt{2}}{L} = \sqrt{2}, cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Damit ist $tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}, sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.