START MATHEMATIK-STAFFEL 2011

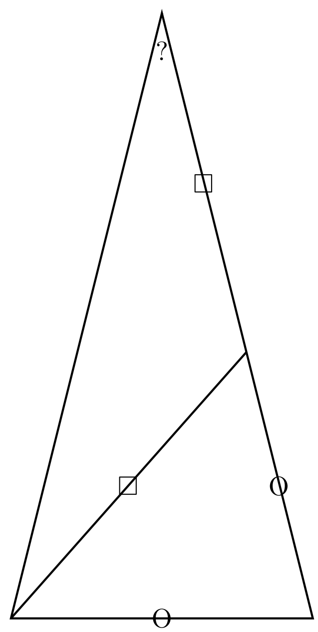
Ihr habt 60 Minuten Zeit für 20 Aufgaben.

Die Gesamtzahl der zu erreichenden Punkte ist 500.

Staffel-Aufgaben 1 (20 Punkte, Rest 480 Punkte)

Drei gleichschenklige Dreiecke

Das hier gezeigte gleichschenklige Dreieck ist in zwei gleichschenklige Dreiecke aufgeteilt.



Wie groß ist der Winkel an der Spitze des (großen) Dreiecks?

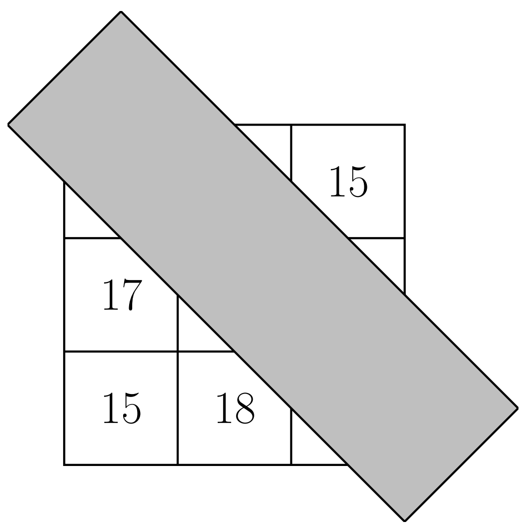
Staffel-Aufgaben $\boxed{2}$ (20 Punkte, Rest 460 Punkte)

Verdeckt

In einem 3×3–Quadrat stehen neun ganze Zahlen. Ein ‚Zug' besteht darin, zu jedem Element einer Reihe oder einer Spalte ein und dieselbe natürliche Zahl hinzu zu addieren. Dies ist die Ausgangssituation.

3	5	7
8	12	0
4	6	3

Nach einer Reihe von Zügen ist folgende Situation entstanden:

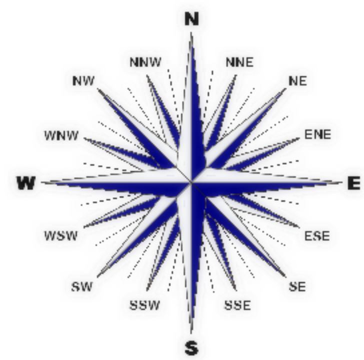


Welche Zahl steht jetzt in der Mitte des Quadrates?

Staffel-Aufgaben $\boxed{3}$ (20 Punkte, Rest 440 Punkte)

Antipoden

London liegt in Richtung WSW von Amsterdam. WSW bedeutet ‚WestSüdWest'.
Der Antipode (‚Gegenfüßler') von Amsterdam ist der Ort, an dem du auf der Erdoberfläche ‚rauskommst', wenn du eine Gerade durch Amsterdam und den Erdmittelpunkt legst. Entsprechend gibt es den Antipoden von London.



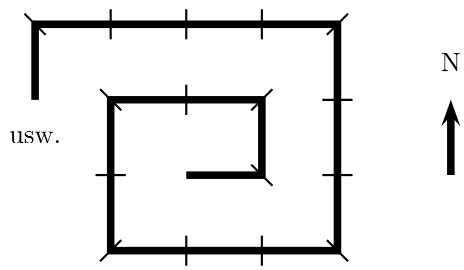
In welcher Richtung liegt der Antipode von London bezogen auf den Antipoden von Amsterdam?

Passt auf! Zur Beantwortung dieser Frage habt ihr nur zwei Versuche.

Staffel-Aufgaben $\boxed{4}$ (30 Punkte, Rest 410 Punkte)

Eine Spirale

Ein Mensch macht Schritte von jeweils 1 Meter. Er geht zuerst einen Schritt nach Osten, dann einen Schritt nach Norden, dann 2 Schritte nach Westen, dann 2 Schritte nach Süden, dann 3 Schritte nach Osten, usw. Auf diese Weise läuft er auf einer Spirale mit rechten Winkeln.

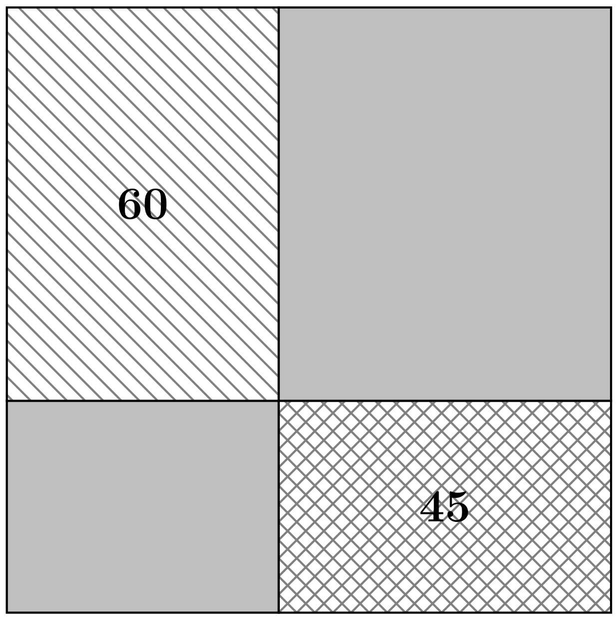


Wie groß ist seine direkte Entfernung (Luftlinie) vom Ausgangspunkt nach 100 Schritten?

Staffel-Aufgaben $\boxed{5}$ (30 Punkte, Rest 380 Punkte)

Ein zerlegtes Quadrat

Ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 225 FE (Flächeneinheiten) ist in vier Rechtecke zerlegt.

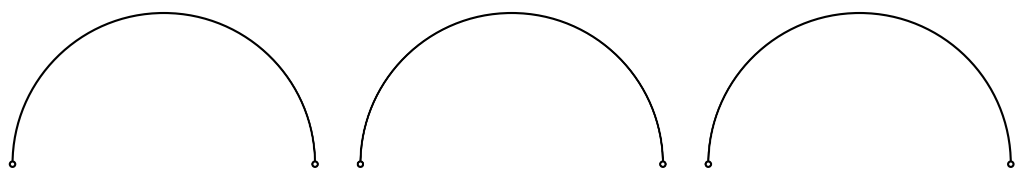


Das einfach gestreifte Rechteck hat einen Flächeninhalt von 60 FE, das gekreuzt gestreifte Rechteck einen Flächeninhalt von 45 FE.

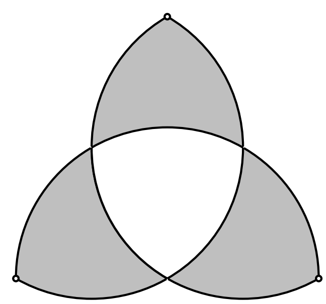
Wie groß ist der Flächeninhalt des größten der beiden grauen Rechtecke?

Staffel-Aufgaben $\boxed{6}$ (20 Punkte, Rest 360 Punkte)

Drei Halbkreise



Drei Halbkreise mit Radius 1 werden derart übereinandergelegt, dass je zwei Endpunkte zusammenfallen.



Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Gebietes?

Staffel-Aufgaben $\boxed{7}$ (30 Punkte, Rest 330 Punkte)

Treppensteigen
Rudi Rastlos nimmt beim Treppensteigen eine, zwei oder drei Stufen gleichzeitig. Er steigt eine Treppe von 9 Stufen hinauf. Hierzu hat er verschiedene Möglichkeiten, z.B. wäre eine Möglichkeit (in der Reihenfolge): 1, 3, 1, 2, 2 Stufen.

Wie viele Möglichkeiten hat Rudi, die Treppe hinauf zu steigen?

Staffel-Aufgaben $\boxed{8}$ (20 Punkte, Rest 310 Punkte)

Kreuzsummen

$$
\begin{array}{ccccc}
\square & + & \square & = & 4 \\
+ & & + & & \\
\square & + & \square & = & 8 \\
+ & & + & & \\
\square & + & \square & = & 14 \\
\parallel & & \parallel & & \\
17 & & 9 & &
\end{array}
$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die oben stehenden Platzhalter mit positiven ganzen Zahlen zu belegen, so dass sowohl die horizontalen als auch die vertikalen Summen ‚stimmen'?

Staffel-Aufgaben $\boxed{9}$ (30 Punkte, Rest 280 Punkte)

Stammbrüche

Ein *Stammbruch* ist ein Bruch, bei dem der Zähler 1 ist und der Nenner eine natürliche Zahl ist, also einer der Brüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.
Die Zahl $\frac{137}{120}$ ist die Summe von 5 Stammbrüchen, nämlich $\frac{137}{120} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$.

Schreibe diese Zahl als Summe von möglichst wenigen Stammbrüchen.

Staffel-Aufgaben $\boxed{10}$ (30 Punkte, Rest 250 Punkte)

Folgen mit Wiederholung

Es gibt 4096 Folgen der Länge 12, deren Glieder nur aus Nullen und Einsen bestehen. Solch eine Folge nennen wir eine ‚Folge mit Wiederholung', wenn man sie in mindestens zwei identische Stücke ‚zerschneiden' kann. Beispielsweise ist die Folge 110110110110110 eine solche ‚Folge mit Wiederholung', da man sie in 4 identische Stücke der Form 110 zerlegen kann.

Wie viele 'Folgen mit Wiederholung' gibt es?

Staffel-Aufgaben $\boxed{11}$ (20 Punkte, Rest 230 Punkte)

Gewinnspiele

Bei einem Wettbewerb mit 5 Spielern spielt jeder Spieler gegen jeden anderen genau einmal. Der Gewinner erhält 3 Punkte, der Verlierer 0 Punkte und bei einem Unentschieden bekommt jeder Spieler einen Punkt. Nachdem jeder gegen jeden genau einmal gespielt hat, haben alle fünf Spieler gleich viele Punkte.

Wie viele Unentschieden kann es gegeben haben? Gib alle Möglichkeiten an.

Staffel-Aufgaben $\boxed{12}$ (20 Punkte, Rest 210 Punkte)

Gemeinsamer Teiler
Betrachte die folgenden 3 dreistelligen natürlichen Zahlen: $12a$, $1a2$ und $a12$. Hierbei ist die Ziffer a verschieden von 0.
Zusätzlich weiß man, dass diese 3 Zahlen einen gemeinsamen zweistelligen Teiler haben.

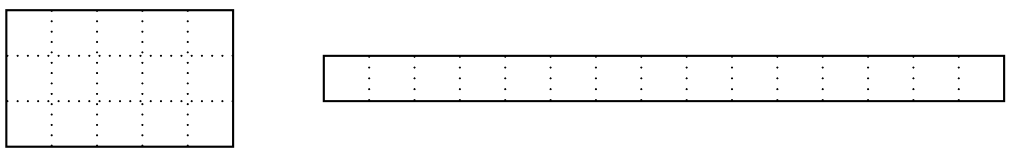
Welcher gemeinsamer Teiler ist es?

Staffel-Aufgaben $\boxed{13}$ (30 Punkte, Rest 180 Punkte)

Rechteckzahlen

Eine Rechteckzahl ist eine natürliche Zahl, die sich als rechteckiges Muster von $n \times m$ Einheitsquadraten darstellen lässt, derart dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks (in m^2) genauso groß ist wie der Umfang (in m).

So ist z.B. die Zahl 15 keine Rechteckzahl, da $3 \cdot 5 \neq 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ und $1 \cdot 15 \neq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 15$ sind.



Gib alle Rechteckszahlen an!

Staffel-Aufgaben $\boxed{14}$ (20 Punkte, Rest 160 Punkte)

Eine Zahlenfolge

Ordnet man die Menge der natürlichen Zahlen der Form $2^a \cdot 10^b$, wobei a und b nichtnegative ganze Zahlen sind, der Größe nach, so erhält man die Folge $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 10$, $a_6 = 16$, $a_7 = 20$, $a_8 = 32$, $\ldots$.

Welches ist der Index k, falls $a_k = 20000$ ist?

Staffel-Aufgaben $\boxed{15}$ (30 Punkte, Rest 130 Punkte)

Ein Steckbrief
Über eine natürliche Zahl $n < 100$ wurden die folgenden 6 Behauptungen gemacht:

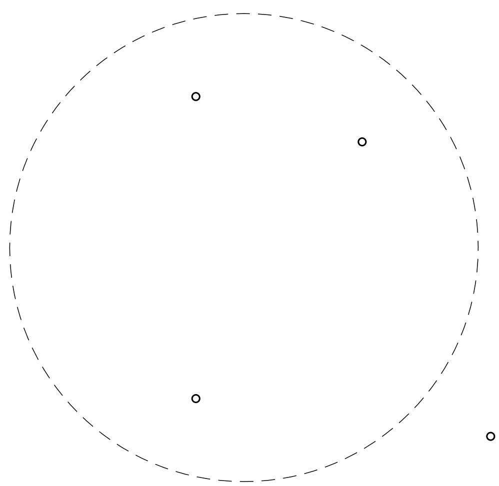
- n ist eine Primzahl.
- n ist ein Vielfaches von 11 minus 1.
- n ist ein Vielfaches von 6 plus 1.
- n ist gerade.
- Die Quersumme von n ist 9.
- n ist kein Vielfaches von 5 minus 1.

Genau zwei dieser Behauptungen sind falsch.

Welche Zahl ist n ?

Staffel-Aufgaben $\boxed{16}$ (30 Punkte, Rest 100 Punkte)

Gleich weit entfernt
Gegeben sind 4 Punkte in der Ebene (wie in der Zeichnung).
Gesucht sind alle Kreise, deren Kreislinie von allen 4 Punkten gleich weit entfernt ist.
Einer der Kreise ist als Beispiel eingezeichnet.



Wie viele derartige Kreise gibt es ?

Staffel-Aufgaben $\boxed{17}$ (20 Punkte, Rest 80 Punkte)

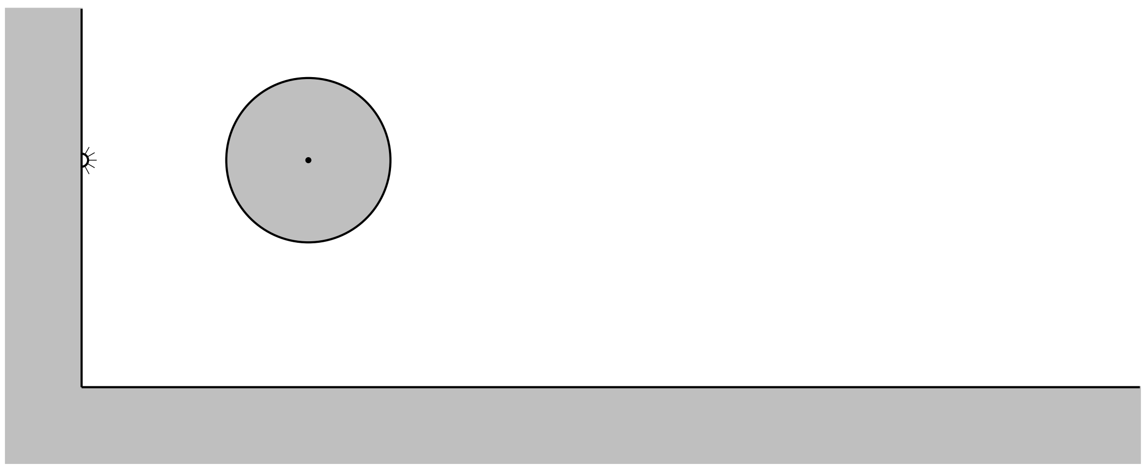
Wie viele Zahlen?
Für eine (im Dezimalsystem gegebene) natürliche Zahl n sei $s(n)$ die Quersumme von n und $a(n)$ die Anzahl der Ziffern von n. Beispielsweise gilt: $s(123) = 6$ und $a(123) = 3$ und damit $s(123)^{a(123)} = 6^3 = 216$.

Für wie viele natürliche Zahlen n mit $0 \leq n \leq 1000$ gilt: $(s(n))^{a(n)} = n$?

Staffel-Aufgaben $\boxed{18}$ (20 Punkte, Rest 60 Punkte)

Angeleuchtete Wand

In der Zeichnung sieht man im Grundriss einen Teil eines Raumes, bei dem sich zwei Wände rechtwinklig treffen, eine Lampe an einer Wand befestigt ist und im Raum eine zylinderförmige Säule steht. Der Mittelpunkt der Säule ist 13 Dezimeter von beiden Wänden entfernt. Der Radius der Säule beträgt 5 Dezimeter. Die Lampe ist in einem Abstand von 13 Dezimetern von der anderen Wand angebracht.



Wie lang (in Dezimeter) ist der Teil der Wand, an dem die Lampe nicht hängt, der von der Lampe angestrahlt wird?

Staffel-Aufgaben $\boxed{19}$ (30 Punkte, Rest 30 Punkte)

Twee kwadraten
Gesucht ist eine natürliche Zahl $n > 0$, so dass $4\,n + 9$ und $9\,n + 4$ beide Quadratzahlen sind.

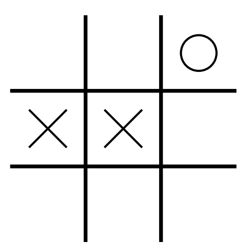
Welche Zahl ist n?

Staffel-Aufgaben 20 (30 Punkte, Rest 0 Punkte)

Tic-Tac-Toe
Alice und Bob spielen das Spiel ‚Tic-Tac-Toe'. Aber anstatt abwechselnd jeweils einen Zug zu machen, wird durch Bieten bestimmt, wer den nächsten Zug macht. Derjenige, der den letzten Zug nicht gemacht hat, beginnt mit Bieten. Der andere muss höher bieten, usw., bis dass einer der Spieler nicht mehr höher bieten will oder kann. Man darf nur ganze Euros bieten. Der höchste Bieter zahlt sein Gebot in einen Pott und kann dann einen Zug machen. Der niedrigere Spieler behält sein Geld und kann mit dem folgenden Bieten beginnen. Der Spieler, der als erster drei gleiche Symbole in einer Reihe (horizontal, vertikal, diagonal) hat, gewinnt das Spiel. Ein Spiel verlief beispielsweise folgendermaßen:

- Beide Spieler haben zu Beginn 100 €.
- Alice bot 50 € und Bob bot nicht darüber. Alice zahlte somit 50 € und setzte ein Kreuzchen.
- Bob bot anschließend 10 € und Alice bot mit 20 € mehr.
- Bob ging nicht höher. Alice hat nun ein zweites Kreuzchen gesetzt; sie hat aber nur noch 30 €.
- Bob gewann die folgenden drei Bieterrunden jeweils mit 31 € und setzte 3 Kringel in eine Reihe.

Somit hat Bob gewonnen. Nach einigen Runden in einem anderen Spiel sieht der Stand wie folgt aus:

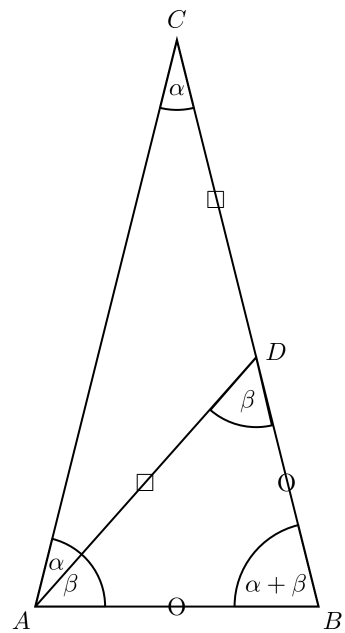


Alice, die mit Kreuzchen spielt, darf das folgenden Bieten beginnen. Bob hat noch 60 € zur Verfügung.
Wie viele Euro braucht Alice noch mindestens, um sicher zu gewinnen?

$\boxed{\text{MATHEMATIK-STAFFEL 2011}}$

Lösungen

$\boxed{1}$



Die Gleichschenkligkeit der entsprechenden Dreiecke führt zu obiger Verteilung der Winkel. Damit gilt $\angle ABD = 180° - 2\beta = 180° - 2\alpha - \beta$, also $\beta = 2\alpha$. Damit ergibt sich aus dem Dreieck $\triangle ABD$: $7\alpha = 180°$, also $\alpha = \frac{180°}{7}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

$\boxed{2}$

Die Zahl, um die sich die 2. Zeile ändert sei a, die um die sich die 3. Zeile ändert sei b; die Zahl, um die sich die 1. Spalte ändert sei c, die Zahl, um die sich die 2. Spalte ändert sei d. Dann gilt:

$a + c = 17 - 8 = 9$, $b + c = 11$, $b + d = 12$. Somit ist $d = c + 1$ und damit $a + d = 10$. Im mittleren Feld steht also $12 + a + d = 22$.

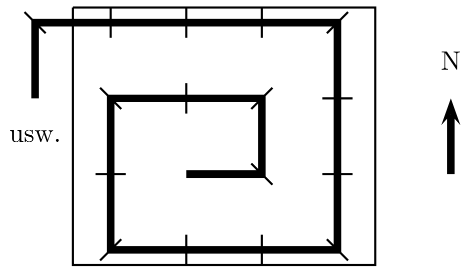
$\boxed{3}$

Betrachtet man die Antipoden, so sieht man, dass das Ost-West Verhältnis erhalten bleibt, das Nord-Süd- Verhältnis aber umgedreht wird. Dies sieht man am einfachsten, indem man zwei Punkte betrachtet, die auf dem selben Längen- oder Breitengrad liegen. Die Antwort ist also WNW.

$\boxed{4}$

1. Lösung:

Nach $4n^2$ Schritten befindest du dich genau n Meter nördlich und n Meter westlich von deinem Ausgangspunkt. Um dies zu sehen, betrachte die Zeichnung für $n = 2$.

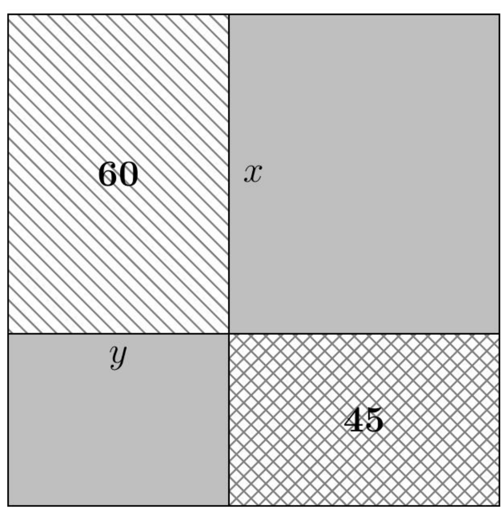


Es existieren genau 16 Punkte in dem Quadrat, bei denen ein Schritt beginnt. Nach 16 Schritten stehst du also links oben gerade außerhalb des Quadrats. Da $100 = 4 \cdot 5^2$ sehen wir, dass du nach 100 Schritten 5 Meter Richtung Norden und 5 Meter Richtung Westen zurückgelegt hast. Der Abstand zu dem Anfangspunkt ist dann $5\sqrt{2}$ Meter.

2.Lösung:
Nach einem Durchlauf aller Himmelsrichtungen, also nach $2\cdot(1+2) = 2\cdot 3$ Schritten befindet man sich 1 m südlich und 1 m westlich vom Ausgangspunkt. Nach 2-maligem Durchlauf, also nach $2 \cdot (1+2+3+4) = 4 \cdot 5$ Schritten, befindet man sich 2 m südlich, 2 m westlich vom Ausgangspunkt, nach 3-maligem Durchlauf, also nach $2 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 6 \cdot 7$ Schritten, 3 m südlich und 3 m westlich, nach 4-maligem Durchlauf, also nach $2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8) = 8 \cdot 9 = 72$ Schritten, 4 m südlich und 4 m westlich, nach 5-maligem Durchlauf, also nach $2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 10 \cdot 11 = 110$ Schritten, 5 m südlich und 5 m westlich vom Ausgangspunkt. Jetzt hat man zwar 10 Schritte zu viel getan, der Abstand zum Ausgangspunkt ist jedoch in beiden Fällen derselbe, also $5\sqrt{2}$ Meter.

$\boxed{5}$

Bezeichne die Längen von 2 Seiten der schraffierten Rechtecke mit x und y wie in der Zeichnung.



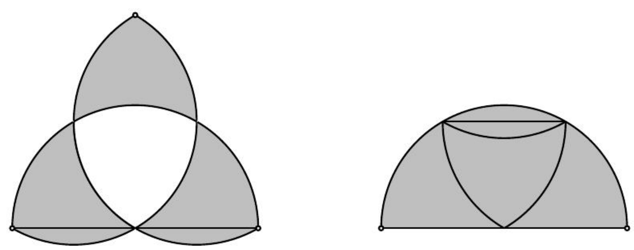
Wir wissen also, dass $xy = 60$ und $(15–x)(15–y) = 45$. Rechnen ergibt:

$$45 = (15–x)(15–y) = 225–15x–15y + xy = 285–15x–15y = 15(19–x–y)$$

Daraus folgt, dass $x + y = 16$. Also $60 = xy = x(16–x)$ oder aber $x^2–16x + 60 = 0$. Diese Gleichung hat als Lösungen: $x = 10$ und $x = 6.x = 10$ liefert $y = 6$. Der Flächeninhalt des einen schraffierten Rechtecks ist dann $x(15–y) = 90$, des anderen $(15 - x) \cdot y = 30$. $x = 6$ liefert $y = 10$ und die Flächeninhalte $x(15–y) = 30$, des anderen $(15 - x) \cdot y = 90$. Der Flächeninhalt des größten Rechtecks ist also 90 FE.

$\boxed{6}$

Mit etwas Schneide- und Klebearbeit siehst du, dass der gesuchte Flächeninhalt der Fläche eines Halbkreises mit dem Radius 1entspricht also $\frac{\pi}{2}$ ist.



$\boxed{7}$

Um auf die neunte Stufe zu gelangen, muss Rudi von der Stufe 6, 7 oder 8 kommen. Die Anzahl der Möglichkeiten ist also gleich der Summe der Anzahl der Möglichkeiten, um auf die Stufen 6, 7 und 8 zu kommen. So kannst du dies weiter zurück verfolgen mit der Rekursion $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$. Du erhältst dann diese Tabelle (Verallgemeinerung der Fibonacci-Folge):

Anzahl Treppenstufen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Möglichkeiten	1	2	4	7	13	24	44	81	149

$\boxed{8}$

Wenn du in das Fach rechts oben und in das Fach direkt darunter etwas eingetragen hast, kannst du alle anderen Fächer nur auf eine Weise füllen. Das einzige, worauf du achten musst, ist, dass diese anderen Zahlen auch positiv bleiben. Rechts oben können wir eine 1, 2 oder 3 eintragen. Wenn wir eine 1 eintragen, kann in dem Fach darunter noch 1 bis einschließlich 7 stehen. Tragen wir eine 2 ein, gehen nur noch 1 bis einschließlich 6 , tragen wir eine 3 ein, nur noch 1 bis einschließlich 5. Insgesamt sind dies 18 Möglichkeiten, die auch alle passen.

$\boxed{9}$

Da $\frac{137}{120} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}$ ist es klar, dass man nur 3 Stammbrüche braucht. Die Frage ist, ob es nicht auch mit zweien funktioniert. Sei $\frac{137}{120}$ die Summe von zwei Stammbrüchen. Dann muss einer der beiden gleich $\frac{1}{1}$ sein, denn $\frac{137}{120} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Das würde aber bedeuten, dass der andere

$\frac{17}{120}$ sein muss, dies ist aber kein Stammbruch. Mit nur zwei Stammbrüchen funktioniert es also nicht.
Es gibt zwei Arten um $\frac{137}{120}$ als Summe von drei Stammbrüchen zu schreiben, nämlich $\frac{137}{120} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}$ und $\frac{137}{120} = \frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{24}$.

$\boxed{10}$
Eine ‚Folge mit Wiederholung' kannst du in 2, 3, 4, 6 oder 12 gleiche Stücke schneiden. Wenn du sie in 4, 6 oder 12 gleiche Stücke schneiden kannst, dann sicher auch in 2. Wir müssen also nur nach den Folgen gucken, die in 2 oder 3 Stücke geschnitten werden können. Alle Folgen, die in zwei gleiche Stücke geschnitten werden können, erhältst du, indem du die ersten sechs Nullen und Einsen willkürlich aussuchst und dann das Stück wiederholst. Dies geht auf $2^6 = 64$ Arten. Alle Folgen, die in drei gleiche Stücke geschnitten werden können, erzeugst du, indem du die ersten vier Ziffern wählst und dann dreimal wiederholst. Dies kannst du auf $2^4 = 16$ Arten. Jetzt haben wir aber die Folgen, die du in sechs Stücke schneiden kannst, doppelt gezählt. Das sind $2^2 = 4$. Die Antwort ist also $64 + 16–4 = 76$.

$\boxed{11}$
Es werden insgesamt 10 Spiele durchgeführt. Ist x die Anzahl der ‚unentschieden' ausgegangenen Partien, y die Anzahl der Gewinnpartien, dann ist die gesamte Anzahl der zu verteilenden Punkte aller Teams $2x + 3y$ mit $x + y = 10$, also $30 - x$ mit $0 \leq x \leq 10$. Da alle Teams gleich geendet haben, muss dies ein Vielfaches von Fünf sein. x ist also gleich 0, 5 oder 10. Dass diese drei Fälle auch alle möglich sind, kannst du einfach überprüfen.

$\boxed{12}$
Nehmen wir an, d sei ein Teiler von sowohl $12a$, $1a2$ und auch $a12$, dann ist d auch ein Teiler von $12a0–1a2 = 1098$ und von $1a20–a12 = 1008$ und also auch von $1098–1008 = 90$. Zuletzt muss d auch ein Teiler von $12a–90 = 3a$ sein.
Alle Teiler von 90 mit zwei Ziffern sind 10, 15, 18, 30, 45 und 90. Da a nicht 0 ist, ist $d = 18$ und $a = 6$. Und tatsächlich: $126 = 7 \cdot 18$, $162 = 9 \cdot 18$ und $612 = 34 \cdot 18$. Die Antwort ist also 18.

$\boxed{13}$
Wenn x eine Rechteckzahl ist, dann gibt es positive Zahlen n und m, so dass $x = nm = 2(n + m)$. Wir können annehmen, dass $n < m$. Da $nm = 2n + 2m < 4m$ folgt daraus, dass $n < 4$. Wir betrachten alle möglichen Werte für n.

- Wenn $n = 1$, dann ist $m = 2(m + 1)$ und das ist unmöglich.
- Wenn $n = 2$, dann ist $2m = 2(m + 2)$, das kann also ebenfalls nicht sein.
- Wenn $n = 3$, dann ist $3m = 2(m+3)$, also $m = 6$, das ergibt $x = 18$ als Rechteckzahl.
- Wenn $n = 4$, dann ist $4m = 2(m+4)$, also $m = 4$, das ergibt $x = 16$ als Rechteckzahl.

Also sind nur 16 und 18 Rechteckzahlen

$\boxed{14}$

Wir müssen die Anzahl der Zahlen der Form $2^a \cdot 10^b$, die kleiner oder gleich 20000 sind, bestimmen. Wir wählen jedesmal b fest und schauen, was a sein kann. Natürlich muss $0 \leq b \leq 4$ sein, da $10^4 = 10000$.

- Wenn $b = 0$, dann muss $0 \leq a \leq 14$, denn $2^{14} = 16384$.
- Wenn $b = 1$, dann muss $0 \leq a \leq 10$, denn $2^{10} = 1024$.
- Wenn $b = 2$, dann muss $0 \leq a \leq 7$, denn $2^7 = 128$.
- Wenn $b = 3$, dann muss $0 \leq a \leq 4$, denn $2^4 = 16$.
- Wenn $b = 4$, dann muss $a = 0$ oder $a = 1$ sein.

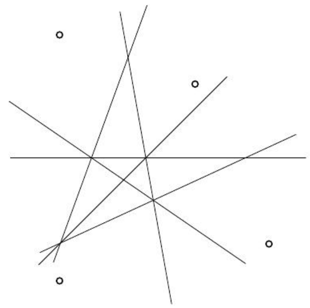
Insgesamt sind das $15 + 11 + 8 + 5 + 2 = 41$ Zahlen. Also ist $k = 41$.

$\boxed{15}$

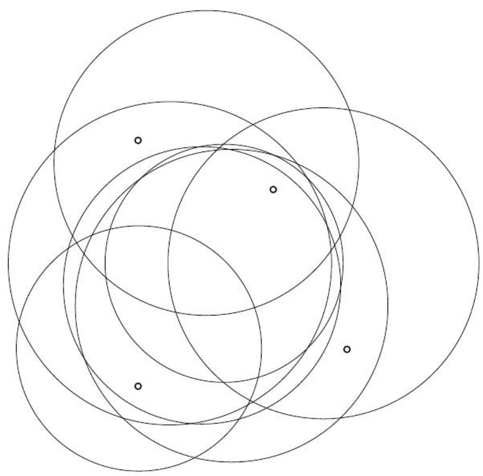
Behauptungen 3 und 4 widersprechen sich, also muss mindestens eine der beiden falsch sein. Genauso widersprechen sich die Behauptungen 1 und 5, denn alle Zahlen, deren Quersumme 9 ist, sind durch 3 teilbar. Behauptungen 2 und 6 sind sicher wahr. Alle Zahlen, die die Behauptungen 2 und 6 erfüllen sind: 10, 21, 32, 43, 65, 76, 87 und 98. Nicht eine dieser Zahlen hat als Quersumme 9. Behauptung 5 ist also falsch. Da Behauptung 3 oder 4 auch schon falsch war, muss Behauptung 1 also wahr sein. n muss gleich 43 sein. Und tatsächlich für $n = 43$ sind die Behauptungen 1, 2, 3 und 6 wahr und die Behauptungen 4 und 5 nicht. Die gesuchte Zahl ist also 43.

$\boxed{16}$

Sei M der Mittelpunkt eines Kreises C. Dann findet man den Punkt auf C, der am nächsten bei einem gegebenen Punkt P liegt, indem man die Gerade PM mit C schneidet. Liegen zwei Punkte P_1 und P_2 auf derselben Seite des Kreises C (d.h. alle beiden im oder beide außerhalb des Kreises) und sind gleich weit entfernt von C, dann liegen sie auch gleichweit entfernt von M, d.h. M liegt auf der Mittelsenkrechten von P_1 und P_2. Beachte jetzt, dass die Punkte aus der Aufgabe nicht auf einem Kreis liegen. Wenn also C ein Kreis ist, zu dem alle Punkte gleichweit entfernt sind, dann zerlegt C die Punkte in zwei Gruppen, die Punkte innerhalb von C und die Punkte außerhalb von C. Es ist unmöglich, dass sich alle Punkte in einer Gruppe befinden, denn dann wären alle vier gleichweit entfernt vom Mittelpunkt M von C und würden somit doch auf einem Kreis liegen. Wenn eine der Gruppen drei Punkte enthält, dann liegt M auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Punkten. Wenn beide Gruppen 2 Punkte enthalten, dann liegt M auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der zwei Paare. Ohnehin muss M auf dem Schnittpunkt von zwei oder drei Mittelsenkrechten liegen. Beachte, dass es vier Arten gibt, um die Punkte in eine Gruppe mit drei und eine Gruppe mit einem zu verteilen und drei Arten um die Punkte in zwei Gruppen mit jeweils zwei zu verteilen. Hier siehst du eine Abbildung mit allen Mittelsenkrechten.



Wie du siehst gibt es tatsächlich sieben Schnittpunkte. Bei jedem dieser Schnittpunkte gibt es genau einen Kreis, der gleichweit entfernt von den vier gegebenen Punkten ist. Denn wenn M zum Beispiel der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Punkte P_1, P_2 und P_3 ist, dann liegt jeder Kreis mit dem Mittelpunkt M gleichweit entfernt von P_1, P_2 und P_3. Wenn der Radius also so gewählt wird, dass der Abstand des Kreises zu dem vierten Punkt auch gleich ist, hast du einen der Kreise gefunden. Hier noch eine Abbildung mit allen sieben Kreisen.

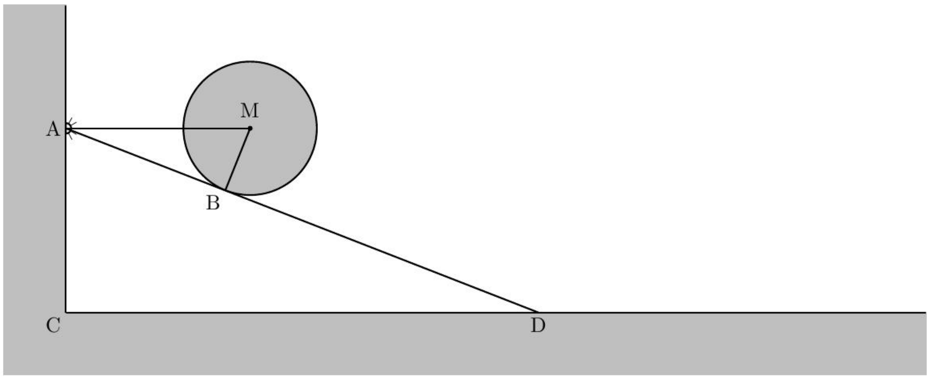


$\boxed{17}$

Nimm an, dass $n = s^a$. Wenn $1 \leq n \leq 9$, dann ist $s = n$ und $a = 1$, all diese Zahlen erfüllen die Voraussetzung. Wenn $10 \leq n \leq 99$, dann ist $a = 2$. Dann ist $n = s^2$, n muss also eine zweistellige Quadratzahl sein. Alle zweistelligen Quadratzahlen sind $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ und $9^2 = 81$, aber nur $n = 81$ erfüllt die Forderung. Wenn $100 \leq n \leq 999$, dann ist $a = 3$. Dann ist $n = s^3$, n muss eine dritte Potenz mit drei Ziffern sein. Alle Kandidaten sind $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$. Von diesen Zahlen erfüllt nur $n = 512$ die geforderten Bedingungen. Insgesamt gibt es also elf Zahlen n kleiner als 1000 mit $n = s^a$.

$\boxed{18}$

Betrachte die Figur. AD ist die Tangente durch A an den Kreis, und B ist der Punkt, an dem AD den Kreis berührt.



Gesucht ist der Abstand $|CD|$. Beachte, dass die Dreiecke $\triangle BMA$ und $\triangle CAD$ ähnlich sind. Denn $\angle CDA = \angle BAM$, da CD und AM parallel sind, wie auch $\angle ACD = \angle MBA = 90°$. Gegeben sind $|AM| = 13$ Dezimeter und $|BM| = 5$ Dezimeter, also $|AB| = 12$ Dezimeter. Auf Grund der Ähnlichkeit erhalten wir $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BM|}$. Also $|CD| = 12 \cdot \frac{13}{5} = \frac{156}{5} = 31,2$ Dezimeter.

$\boxed{19}$

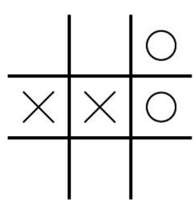
Nehmen wir an, es gäbe ganze Zahlen a und b, so dass $4n + 9 = a^2$ und $9n + 4 = b^2$. Wir können dann berechnen, dass:

$$9a^2 - 4b^2 = 9(4n + 9) - 4(9n + 4) = 36n + 81 - 36n - 16 = 65 = 13 \cdot 5.$$

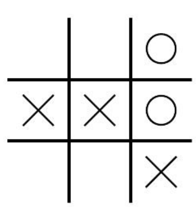
Es gilt außerdem $9a^2 - 4b^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$. Da 13 und 5 Primzahlen sind und $3a + 2b > 3a – 2b$ folgt daraus, dass $3a + 2b = 13$ und $3a - 2b = 5$ oder $3a + 2b = 65$ und $3a - 2b = 1$ sein muss. Aus dem ersten Fall folgt, dass $a = 3$ und $b = 2$ sein muss. Das bedeutet aber $n = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Der zweite Fall ergibt $a = 11$, $b = 16$ und ergibt $n = 28$.

$\boxed{20}$

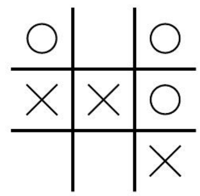
Alice braucht nur 37 Euro. Sie gewinnt wie folgt: Zuerst setzt sie 37 Euro und Bob muss dann 38 setzen. Folgende Situation entsteht:



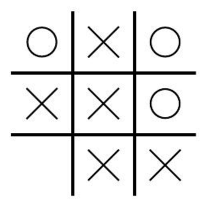
Alice hat noch 37 Euro und Bob noch 22. Alice muss das folgende Gebot gewinnen und setzt also 22 Euro.



Alice hat jetzt noch 15 Euro und Bob immer noch 22. Bob muss jetzt 15 Euro bieten, um zu verhindern, dass Alice direkt gewinnt.



Jetzt hat Alice noch 15 Euro und Bob nur 7 Euro. Alice kann jetzt also die folgenden zwei Gebote gewinnen mit 7 beziehungsweise 8 Euro. Mit zwei Schritten nacheinander bekommt sie leicht drei in einer Reihe.



Auf die gleiche Art und Weise siehst du, dass mit nur 36 Euro das Spiel unentschieden ausgehen würde. 37 Euro ist also der minimale Betrag mit dem Alice sicher gewinnen kann.