Staffel-Aufgabe $\boxed{1}$ (20 Punkte, Rest 480 Punkte)

Addieren
Die Summe von zwei zweistelligen Zahlen ergibt eine dreistellige Zahl (dabei beginnt keine der beiden zweistelligen Zahlen mit einer 0). :

$$\begin{array}{rrr} & \_ & \_ \\ + & \_ & \_ \\ \hline \_ & \_ & \_ \end{array}$$

Jede Ziffer von 0 bis 6 kommt genau einmal vor.
Wie lautet die dreistellige Zahl?

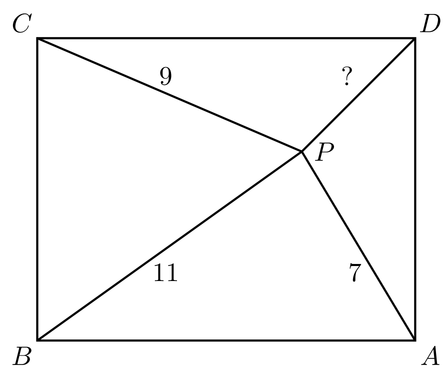
Staffel-Aufgabe $\boxed{2}$ (30 Punkte, Rest 450 Punkte)

Anzahl der Nullen
Die Zahl $10^{2012} - 1$ ist durch die Zahl $10^4 - 1$ teilbar.
Wie viele Nullen sind im Ergebnis $\frac{10^{2012}-1}{10^4-1}$ *enthalten?*

Staffel-Aufgabe $\boxed{3}$ (20 Punkte, Rest 430 Punkte)

Ein Rechteck

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ und ein Punkt P innerhalb des Rechtecks, sodass $|AP| = 7$, $|BP| = 11$ und $|CP| = 9$ gelten.



Wie lang ist die Strecke $|DP|$?

Staffel-Aufgabe $\boxed{4}$ (20 Punkte, Rest 410 Punkte)

Wie viele Personen sagen die Wahrheit?
Auf einem Empfang sind 10 Personen.

- Die erste Person sagt, sie habe auf dem Empfang keiner anderen Person die Hand gegeben.
- Die zweite Person sagt, sie habe auf dem Empfang genau einer anderen Person die Hand gegeben.
- Die dritte Person sagt, sie habe auf dem Empfang genau zwei anderen Personen die Hand gegeben.

  ⋮

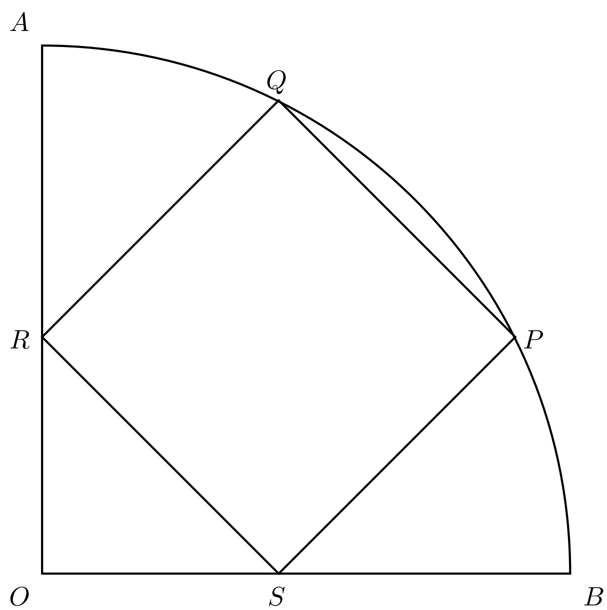
- Die zehnte Person sagt, sie habe auf dem Empfang genau neun anderen Personen die Hand gegeben.

Wie viele Personen können maximal die Wahrheit gesagt haben?

Staffel-Aufgabe $\boxed{5}$ (20 Punkte, Rest 390 Punkte)

Viertelkreis

Betrachte den Viertelkreis OAB mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 1. $PQRS$ sei ein Quadrat, das sich im Viertelkreis OAB befindet. Dabei liegen die Punkte P und Q auf dem Bogen AB, R auf der Strecke OA und S auf der Strecke OB.



Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates $PQRS$?

Staffel-Aufgabe $\boxed{6}$ (30 Punkte, Rest 360 Punkte)

Eine Uhr

Wir betrachten eine Uhr, deren Stunden- und Minutenzeiger beide die Länge 1 haben. Beide bewegen sich wie üblich kontinuierlich über das Ziffernblatt. Es gibt einen Zeitpunkt zwischen 12.00 Uhr und 12.30 Uhr, bei dem die Enden der beiden Zeiger genau den Abstand 1 voneinander haben.

Wie viele volle Sekunden sind zu diesem Zeitpunkt seit 12.00 Uhr vergangen?

Staffel-Aufgabe $\boxed{7}$ (30 Punkte, Rest 330 Punkte)

Weder Quadrat noch dritte Potenz
Wir betrachten die aufsteigende Folge aller positiven ganzen Zahlen, die nicht das Quadrat oder die dritte Potenz einer ganzen Zahl sind.

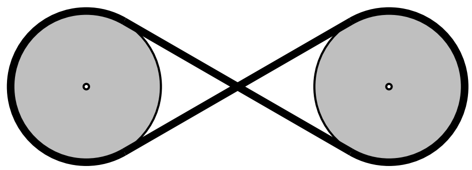
$$2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, \ldots$$

An welcher Stelle dieser Folge steht die Zahl 2012*?*

Staffel-Aufgabe $\boxed{8}$ (30 Punkte, Rest 300 Punkte)

Ein Band

Ein Band ist um zwei Räder gespannt, die jeweils den Radius 1 haben. Die Achsen der Räder haben den Abstand 4 zueinander.



Wie lang ist das Band?

Staffel-Aufgabe $\boxed{9}$ (20 Punkte, Rest 280 Punkte)

Produkt und Summe

Für welche positiven ganzen Zahlen x existiert eine positive ganze Zahl y, so dass gilt

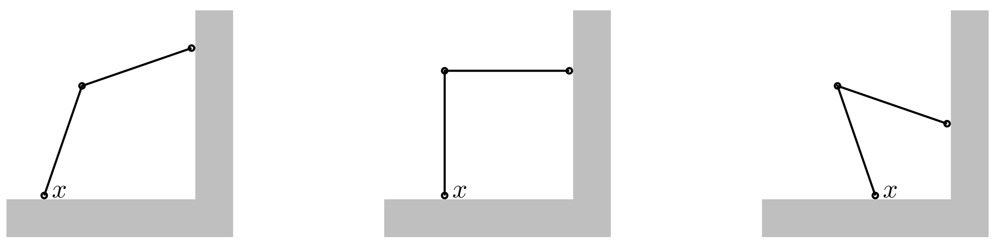
$$xy = x + 4y?$$

Gib alle möglichen x-Werte an.

Bemerkung: 0 ist nicht positiv.

Staffel-Aufgabe $\boxed{10}$ (30 Punkte, Rest 250 Punkte)

Parzellen-Abgrenzung
Eine Parzelle eines Campingplatzes ist von zwei Hecken im rechten Winkel begrenzt. Ein Camper hat 3 Stangen und ein 10 Meter langes Seil zur Verfügung, um eine symmetrsiche Fläche zum Campen abzustecken. Auf jedem Schenkel des rechten Winkels soll sich eine Stange befinden, beide Stangen sollen den gleichen Abstand zum Scheitelpunkt haben. Die dritte Stange soll zu beiden Heckenstücken, also zu beiden Schenkeln, denselben Abstand haben. Somit bildet das um die Stangen gespannte Seil mit den beiden Heckenstücken den gleichen Winkel. Hierfür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten:



Für welchen Winkel x (vgl. Bild) wird die abgesteckte Parzelle maximal?

Staffel-Aufgabe $\boxed{11}$ (20 Punkte, Rest 230 Punkte)

Ganzzahliger Anteil und Nachkommaanteil

Für eine positive reelle Zahl definieren wir $[x]$ als größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Den Nachkommaanteil $\{x\}$ von x definieren wir durch $\{x\} = x - [x]$. Ist z.B. x=3,52, so ist $[x] = 3$ und $\{x\} = 0{,}52$.

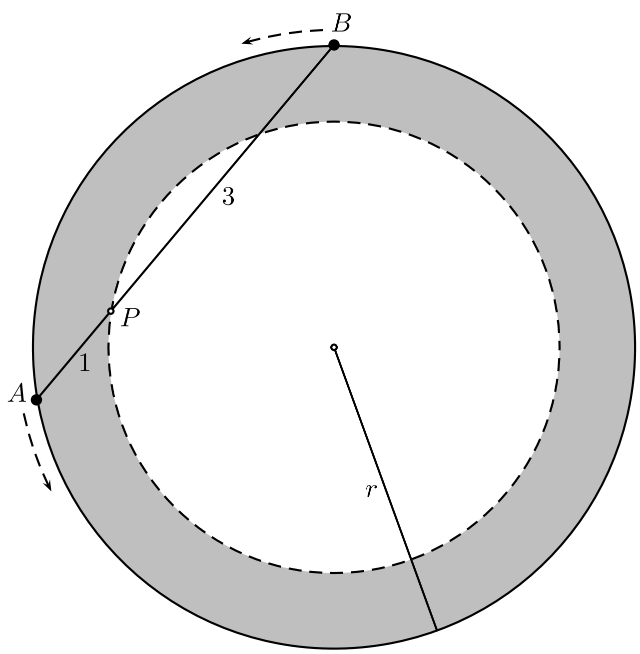
Für wieviele positive reelle Zahlen, die kleiner als 2012 sind, gilt

$$x = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}?$$

Staffel-Aufgabe $\boxed{12}$ (30 Punkte, Rest 200 Punkte)

Flächeninhalt

In einem Kreis mit Radius r dreht sich eine Strecke, deren Endpunkte A und B sich auf dem Kreisrand befinden. Die Strecke hat die Länge 4. Auf der Strecke liegt ein Punkt P derart, dass $|AP| = 1$ und $|BP| = 3$. In P befindet sich ein Stift. Wenn A (und B) auf dem Kreisrand eine vollständige Drehung vollführen, beschreibt auch P einen Kreis, sodass hierdurch ein Kreisring markiert wird.



Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Kreisringes?

Staffel-Aufgabe $\boxed{13}$ (20 Punkte, Rest 180 Punkte)

Möglichst schnell nach 01
Wir betrachten alle natürlichen Zahlen von 01 bis 98. Hierbei schreiben wir die natürlichen Zahlen 1 bis 9 mit einer 0 davor, also als 01 bis 09.

Mit solch einer Zahl können wir folgende zwei Operationen (Schritte) durchführen:

- Es kann 1 addiert werden.
- Die Ziffern können vertauscht werden.

Beachte, dass für die Zahl 98 nur die zweite Operation möglich ist. Führt man diese Operationen (in beliebiger Reihenfolge) wiederholt durch, so erhält man einen Weg von einer Zahl zu einer anderen Zahl. Beispielsweise ist

$$12, 13, 14, 41, 42$$

ein Weg von 12 nach 42 mit 4 Schritten.

Für eine Anfangszahl suchen wir nun den kürzesten Weg, um nach 01 zu kommen (d.h. in möglichst wenig Schritten).
Bei welcher Zahl muss man beginnen, damit deren kürzester Weg maximale Länge(von allen kürzesten Wegen der anderen Zahlen) hat?

Staffel-Aufgabe $\boxed{14}$ (30 Punkte, Rest 150 Punkte)

Möglichst viele Eigenschaften
Gesucht sind positive ganze Zahlen mit zwei Ziffern (also ≥ 10), die möglichst viele der folgenden Eigenschaften besitzen:

- Die Quersumme der Zahl ist 10
- Sie ist ein Vielfaches von 7 plus 2.
- Sie ist die Summe zweier Quadrate, die beide nicht ‚0' sind.
- Sie ist ein Vielfaches von 3.
- Sie ist ungerade.
- Sie ist die Zahl 55.

Welche zweiziffrige Zahl hat die meisten dieser Eigenschaften?

Staffel-Aufgabe $\boxed{15}$ (20 Punkte, Rest 130 Punkte)

Ein periodischer Bruch

4711 hat die Primfaktorzerlegung $4711 = 7 \cdot 673$. Daher hat $\frac{1}{4711} = 0,0002122691573\ldots$ eine periodische Dezimalbruchentwicklung, die direkt hinter dem Komma anfängt (also mit 0002).

Welches sind die letzten beiden Ziffern des periodisch wiederkehrenden Blockes?

Staffel-Aufgabe $\boxed{16}$ (30 Punkte, Rest 100 Punkte)

Die Balkenwaage

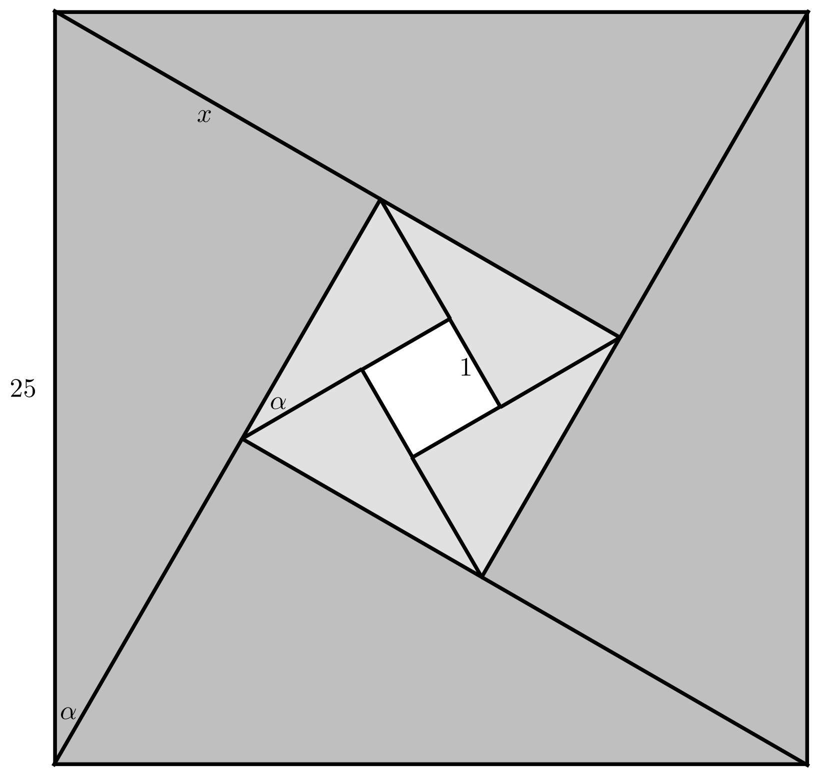
Gegeben seien eine Balkenwaage und 3 ganzzahlige Gewichte. Hiermit kann man alle ganzzahligen Massen von 1kg bis 27 kg bestimmen, wobei allerdings die Gewichte auf beiden Balkenarmen verteilt sein können und manche Massen nur durch Einschachtelung bestimmt werden.

Welche Werte haben die Gewichte?

Staffel-Aufgabe $\boxed{17}$ (20 Punkte, Rest 80 Punkte)

Ineinander liegende Quadrate

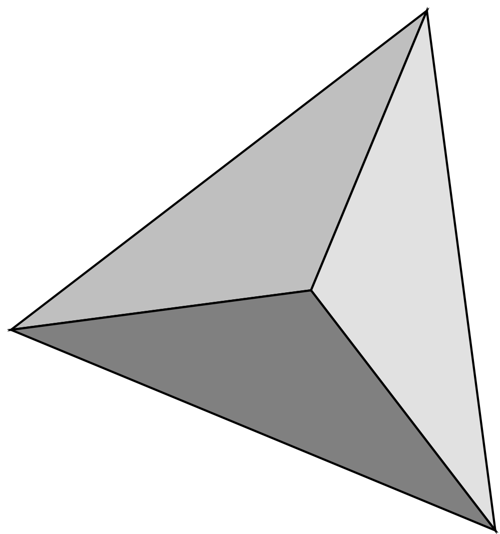
Drei Quadrate liegen so wie man es in der Zeichnung sieht ineinander. Hierbei sind die mit α bezeichneten Winkel gleich. Das größte Quadrat hat die Seitenlänge 25, das kleinste Quadrat die Seitenlänge 1. Der Abstand zwischen einer Ecke des großen Quadrates und der nächst-liegenden Ecke des mittleren Quadrates werde mit x bezeichnet (s. Zeichnung).



Wie groß ist x?

Staffel-Aufgabe $\boxed{18}$ (20 Punkte, Rest 60 Punkte)

Das regelmäßige Tetraeder
Ein Tetraeder ist ein Körper im Raum bestehend aus 4 Ecken, 4 Seitenflächen und 6 Kanten. Die Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders sind zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke.



Die Zeichnung stellt ein solches Tetraeder dar.
Wie viele Ebenen gibt es, die zu den 4 Eckpunkten eines regelmäßigen Tetraeders den gleichen Abstand haben?

Staffel-Aufgabe $\boxed{19}$ (30 Punkte, Rest 30 Punkte)

Ganzzahlige Lösungen
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl $a > 1$, für die es eine ganze Zahl b gibt, sodass die Gleichung

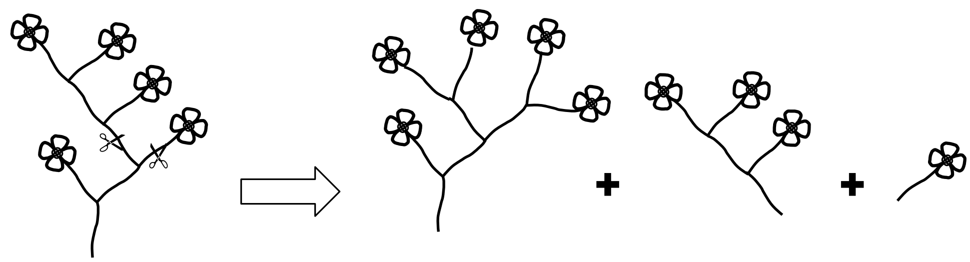
$$5a^2 - 4b^2 = 1$$

erfüllt ist.
Bestimme a!

Staffel-Aufgabe $\boxed{20}$ (30 Punkte, Rest 0 Punkte)

Die Bizynie

Die Bizynie ist eine Pflanze, die am Anfang aus einem Stiel und einer Blüte besteht. Durchtrennt man einen Stiel, so entsteht eine Verzweigung, aus der über Nacht zwei neue Stiele mit je einer Blüte sprießen. Beispielsweise:



Ole Ander durchtrennt bei der Byzinie in seinem Garten 5 Stiele, die er morgen seiner Frau Kori zum Geburtstag schenken will. Bei der Gartenpflanze entstehen dadurch 5 neue Verzweigungen. Hierbei entspricht jedem Lebensjahr von Kori genau eine Blüte an den abgeschnittenen Stielen. Während Kori sich am anderen Tag freut, ist die Bizynie geschrumpft. Im Vergleich zu ihrem Aussehen vor Oles Schnittaktion hat sie nur noch die Hälfte der Blüten und $\frac{29}{59}$ der Stiele.

Wie alt ist Kori an ihrem Geburtstag geworden?

$\boxed{\text{MATHEMATIK-STAFFEL 2012}}$

Antworten

$\boxed{1}$ 105

$\boxed{2}$ 1506

$\boxed{3}$ $|DP| = 3$

$\boxed{4}$ 9

$\boxed{5}$ $\frac{2}{5} = 0.4$

$\boxed{6}$ 654

$\boxed{7}$ 1959

$\boxed{8}$ $4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$

$\boxed{9}$ 5, 6,und 8

$\boxed{10}$ $67\frac{1}{2}$Grad oder $\frac{3}{8}\pi$.

$\boxed{11}$ 2010

$\boxed{12}$ 3π

$\boxed{13}$ 11

$\boxed{14}$ 37

$\boxed{15}$ 09

$\boxed{16}$ 2, 6 und 18 kg

$\boxed{17}$ 15

$\boxed{18}$ 7

$\boxed{19}$ $a = 17$

$\boxed{20}$ 25 Jahre

MATHEMATIK-STAFFEL 2012

Lösungen

$\boxed{1}$

Benenne die sieben Ziffern mit a bis g:

$$\begin{array}{ccc} & a & b \\ + & c & d \\ \hline e & f & g \end{array}$$

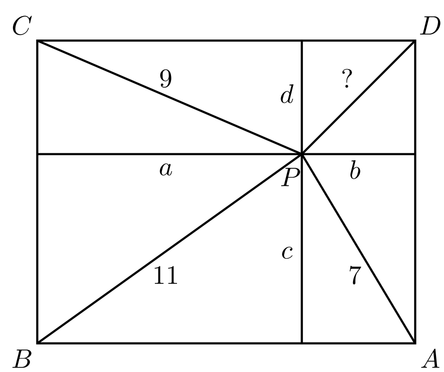
Da beide Zahlen kleiner als 100 sind, ist das Ergebniss kleiner als 200. Also ist $e = 1$. Außerdem ist $a + c \geq 9$. $a + c = 9$ klappt nicht, weil es in diesem Fall keine Ziffern mehr gibt für $b + d > 10$. Somit ist a oder c gleich 6 und das andere gleich 4 oder 5. Man beobachte, dass weder b,d noch g gleich 0 sein können. Also ist $f = 0$ und somit $a = 6$ und $c = 4$ oder andersherum. Damit bleiben 2, 3 und 5 für b, d und g, was mit $g = 5$ klappt.

$\boxed{2}$

$10^{2012} - 1$ besteht aus 2012 Neunen, und $10^4 - 1 = 9999$. Das Ergebniss von $\frac{10^{2012}-1}{10^4-1}$ besteht aus einer 1, gefolgt von drei Nullen, gefolgt von einer 1, gefolgt von 3 Nullen etc., bis zur letzten Ziffer, einer 1. Da $2012/4 = 503$, sind 503 Einsen im Ergebniss und damit $(503 - 1) \cdot 3 = 1506$ Nullen.

$\boxed{3}$

Zeichne zwei Linien durch den Punkt P, parallel zu den Seiten des Rechteckes.



Die Buchstaben a bis d bezeichnen die Entfernung von P zu den Seiten. Nach dem Satz des Pythagoras sehen wir, dass $a^2 + c^2 = 121$, $a^2 + d^2 = 81$, $b^2 + c^2 = 49$, und $b^2 + d^2$ ist gleich dem Quadrat der gefragten Entfernung. Eine schnelle Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} 9 &= 81 + 49 - 121 \\ &= (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) - (a^2 + c^2) \\ &= b^2 + d^2 \end{aligned}$$

Und somit $|DP| = 3$

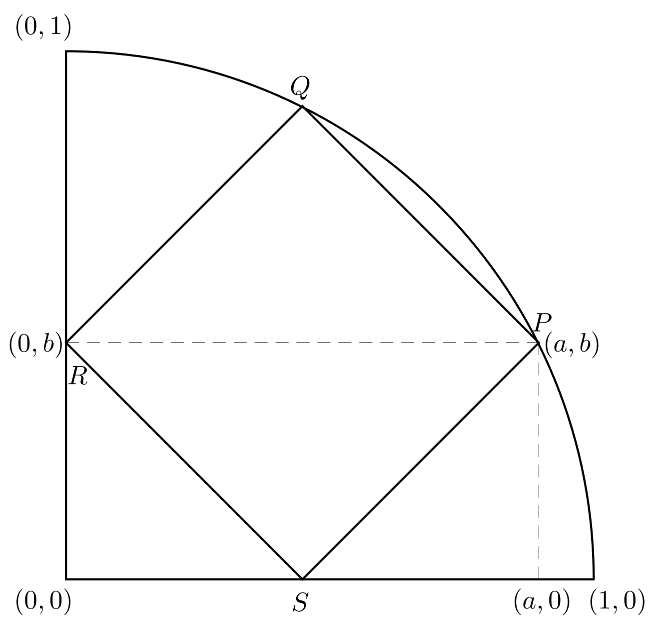
$\boxed{4}$

Die Personen 1 und 10 können beide nicht die Wahrheit sagen. Es können also maximal neun Personen die Wahrheit gesagt haben. Folgende Tabelle zeigt, dass neun Personen möglich ist:

Person	Hände geschüttelt mit
1	6, 7, 8, 9, 10
2	10
3	9, 10
4	8, 9, 10
5	7, 8, 9, 10
6	1, 7, 8, 9, 10
7	1, 5, 6, 8, 9, 10
8	1, 4, 5, 6, 7, 9, 10
9	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10
10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\boxed{5}$

Platziere das Bild in einem Koordinatensystem, so dass R im Ursprung, A im Punkt $(0, 1)$ und B im Punkt $(0, 1)$ liegen. Seien (a, b) die Koordinaten des Punktes P.



Aus Symmetriegründen hat das Quadrat einen Winkel von 45° zu den Achsen. Damit ist $R = (0, b)$ und $S = (b, 0)$. Da die x-Koordinate von S genau zwischen denen von P und

R liegt, ist $a = 2b$, also $P = (2b, b)$. Da P auf dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung liegt, folgt aus dem Satz des Pythagoras $(2b)^2 + b^2 = 1$, und somit $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Um nun die Länge der Strecke RS zu bestimmen, benutzen wir wieder den Satz des Pythagoras, diesmal im Dreieck OSR. Dies ergibt $|RS| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Der Flächeninhalt ist das Quadrat hiervon, also $\frac{2}{5}$.

$\boxed{6}$

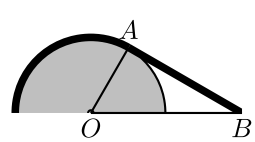
Der Minutenzeiger bewegt sich in einer Stunde, also $60 \cdot 60 = 3600$ Sekunden, einmal um die Uhr. Er bewegt sich somit um $\frac{1}{10}^\circ$ pro Sekunde. Der Stundenzeiger braucht 12 Stunden für eine Umdrehung, also 12 mal so lange. Er bewegt sich somit um $\frac{1}{120}^\circ$ pro Sekunde. Also ist der Winkel zwischen den beiden Zeigern nach t Sekunden $(\frac{1}{10} - \frac{1}{120})t = \frac{11}{120}t$.
Wenn die Spitzen der Zeiger genau Abstand 1 haben, bilden sie zusammen mit dem Mittelpunkt der Uhr ein gleichseitiges Dreieck. Damit haben sie einen Winkel von 60° zwischen sich. Mit obiger Formel für den Winkel zwischen den Zeigern ergibt sich $60 = \frac{11}{120}t$. Daraus folgt $t = 654\frac{6}{11}$. Es sind also 654 Sekunden verstrichen.

$\boxed{7}$

2012 steht an Stelle 2012 in der Folge $1, 2, 3, 4, \ldots$. Unsere Folge ergibt sich aus dieser Folge, wenn wir die Quadrate und dritten Potenzen weglassen. Für jede solche Zahl kleiner als 2012, die wir weglassen, rückt 2012 eine Stelle nach vorne. Wir müssen also nur die Anzahl aller Quadrate und dritten Potenzen kleiner als 2012 finden und von 2012 abziehen. Es ist $44^2 = 1936$ und $45^2 = 2025$, also sind 44 Quadrate kleiner als 2012. Außerdem ist $12^3 = 1728$ und $13^3 = 2197$, also sind 12 dritte Potenzen kleiner als 2012. Dies ergibt $2012 - 44 - 12 = 1956$. Diese Zahl ist aber noch nicht richtig, da wir sechtse Potenzen zweimal gezählt haben. Die drei gezählten sechsten Potenzen sind 1, $3^6 = 729$ und $4^6 = 4096$. Die Antwort ist somit 1959.

$\boxed{8}$

Da das Problem symmetrisch ist, schauen wir uns nur ein Viertel an:



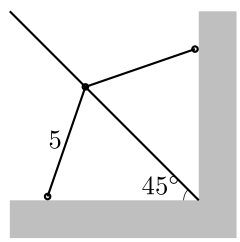
Hier ist O der Mittelpunkt des linken Rads, A der Punkt, an dem das Band das Rad verlässt und B der Punkt, an dem das Band sich selber kreuzt. Dann ist die Linie durch A und B eine Tangente an den Kreis, also ist OAB ein rechter Winkel. Nach Vorraussetzung ist $|OA| = 1$ und $|OB| = 2$. Mit dem Satz des Pythagoras sehen wir, dass $|AB| = \sqrt{3}$. Damit wissen wir, dass die Innenwinkel im Dreieck OAB 30°, 60° und 90° sind. Somit ist der Winkel AOB 60°, oder im Bogenmaß $\frac{\pi}{3}$. Der Teil des Bandes, der am Kreis verläuft, hat somit eine Länge von $\frac{2\pi}{3}$. Die Gesamtlänge des Bandes ergibt sich somit zu $4(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3})$.

$\boxed{9}$

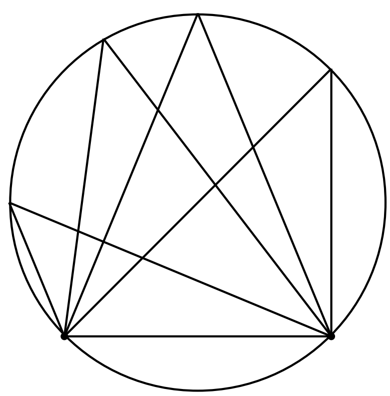
Falls $xy = x + 4y$, so gilt $xy - x - 4y = 0$. Ferner ist $(x-4)(y-1) = xy - x - 4y + 4$. Also gilt $(x-4)(y-1) = 4$. Da x und y positive ganze Zahlen sind, folgt dass $x - 4$ ein positiver Teiler von 4 sein muss. Also ist $x - 4$ gleich 1, 2 oder 4. Somit ist x gleich 5, 6 oder 8. Damit ergibt sich y zu 5, 3 oder 2.

$\boxed{10}$

Unabhängig von der konkreten Platzierung der Stangen zerteilt die Linie zwischen der mittleren Stange und der Ecke die Parzelle in zwei gleichgroße dreieckige Gebiete.



Diese Dreiecke haben einen Winkel von 45° und eine dem Winkel gegenüber liegende Seite mit Länge 5. Das Problem reduziert sich also darauf, das größtmöglichste Dreieck mit diesen Eigenschaften zu finden.
Wenn wir die Seite mit Länge 5 fest halten und den 45° Winkel bewegen, so beschreibt dieser einen Kreisbogen.



Der maximale Flächeninhalt wird erreicht, wenn der obere Punkt an der höchsten Stelle im Kreis steht. Das Dreieck ist dann gleichschenklig. Der gesuchte Winkel ergibt sich somit zu $\frac{180-45}{2} = 62,5°$ oder im Bogenmaß $\frac{3}{8}\pi$.

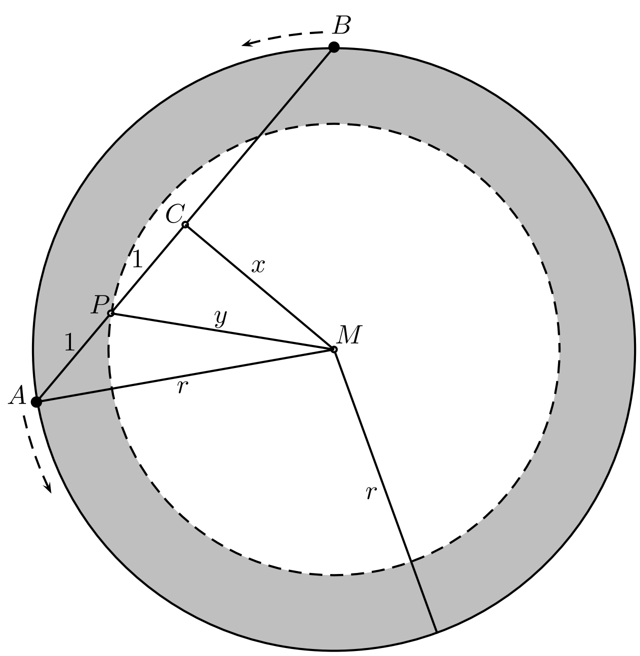
$\boxed{11}$

Für jede natürliche Zahl n die größer als 1 und kleiner als 2012 ist, erfüllt $x = n + \frac{1}{n}$ die Gleichung $x = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}$, denn es gilt: $[x] = n$ und $\{x\} = \frac{1}{n}$. Dies liefert uns 2010 verschiedene Lösungen. Wir zeigen nun, dass dies alle Lösungen sind.

Eine Zahl x mit $x = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}$ kann nicht ganzzahlig sein, da sonst $\{x\} = 0$ und also $\frac{1}{\{x\}}$ nicht definiert wäre. Ausserdem muss x größer oder gleich 1 sein, denn sonst wäre $[x]$ gleich 0.
Angenommen es gilt: $1 < x < 2$. Dann ist $[x] = 1$, also auch $\frac{1}{[x]} = 1$. Wegen $0 < \{x\} < 1$ gilt ausserdem: $\frac{1}{\{x\}} > 1$. Somit ist $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}$ größer als 2 und kann also nicht gleich x sein.
Wir haben gezeigt, dass alle Lösungen größer als 2 sein müssen. Nun zeigen wir noch, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen n und $n+1$ höchstens eine Lösung liegen kann, nämlich $n + \frac{1}{n}$. Betrachte eine Zahl x mit $n < x < n+1$. Dann gilt: $[x] = n$.
Falls $x < n + \frac{1}{n}$, dann ist $\{x\} < \frac{1}{n}$, also $\frac{1}{\{x\}} > n$, und daher $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} > \frac{1}{n} + n > x$.
Falls $x > n + \frac{1}{n}$, dann ist $\{x\} > \frac{1}{n}$, also $\frac{1}{\{x\}} < n$, und daher $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} < \frac{1}{n} + n < x$. Somit haben alle Lösungen die Form $x = n + \frac{1}{n}$ für eine ganze Zahl $n > 1$.

$\boxed{12}$

Wir zeichnen zunächst einige Hilfslinien:



Sei M der Mittelpunkt des Kreises und sei C die Mitte der Strecke AB. Sei x die Länge der Strecke CM und y die Länge der Strecke PM.
Pythagoras angewandt auf die Dreiecke ACM und PCM ergibt: $x^2+4 = r^2$ und $x^2+1 = y^2$. Also gilt: $y^2 = r^2-3$. Die Fläche des äußeren Kreises ist πr^2. Die Fläche des inneren Kreises ist $\pi y^2 = \pi(r^2-3) = \pi r^2 - 3\pi$. Die Fläche des grauen Gebiets ist somit 3π.

$\boxed{13}$

Zur Zahl 01 gelangt man nur via 10. Zur 10 kommt man über eine Zahl, die kleiner als 10 ist. Eine solche Zahl wiederum erhält man, wenn man von einem Vielfachen von 10 die Ziffern vertauscht. Der schnellste Weg nach 01 sieht wie folgt aus:

1) Falls deine Zahl größer oder gleich 90 ist, vertausche die Ziffern.

2) Erhöhe die Zahl um 1 bis du ein Vielfaches von 10 erhälst.

3) Vertausche die Ziffern. Hör auf, falls du bei 01 angekommen bist.

4) Erhöhe die Zahl um 1 bis du bei 10 angekommen bist.

5) Vertausche die Ziffern. Nun bist du bei 01 angekommen.

Von Zahlen, die größer oder gleich 90 sind, gelangt man so in höchstens 12 Zügen zur Zahl 01. Ansonsten dauert der Prozess höchstens 19 Züge, nämlich maximal 9 Züge für Schritt 2), 1 Zug für Schritt 3), 8 Züge für Schritt 4) und 1 Zug für Schritt 5). Dieses Maximum wird erreicht, wenn man mit der Zahl 11 beginnt.

$\boxed{14}$

Eine Zahl kann nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein und 10 als Quersumme haben. Also können höchstens fünf Eigenschaften zugleich gelten. Für die Zahl 55 gelten nur drei der Eigenschaften. Für alle anderen Zahlen können noch höchstens vier Eigenschaften gelten. Eine Zahl mit vier dieser Eigenschaften muss ein Vielfaches von 7 plus 2, die Summe von zwei Quadraten, ungerade und entweder ein Vielfaches von 3 sein oder die Quersumme 10 haben.
Indem wir einfach alle ungeraden Vielfachen von 7 plus 2 durchprobieren, sehen wir, dass nur die Zahlen 37, 65 und 97 als Summe von zwei Quadraten geschrieben werden können. Keine dieser Zahlen ist durch 3 teilbar, aber 37 hat 10 als Quersumme. Somit ist 37 die einzige Zahl, die vier der Eigenschaften besitzt.

$\boxed{15}$

Multiplizieren wir die Periode von $\frac{1}{4711}$ mit 4711 und setzen das erhaltene Produkt wiederholt hinter das Komma, so erhalten wir die Dezimalentwicklung von $4771 \cdot \frac{1}{4711}$, d.h. der Zahl 1. Also besteht das erhaltene Produkt ausschließlich aus Neunen. Die letzten beiden Ziffern der Periode selbst müssen daher 09 sein.

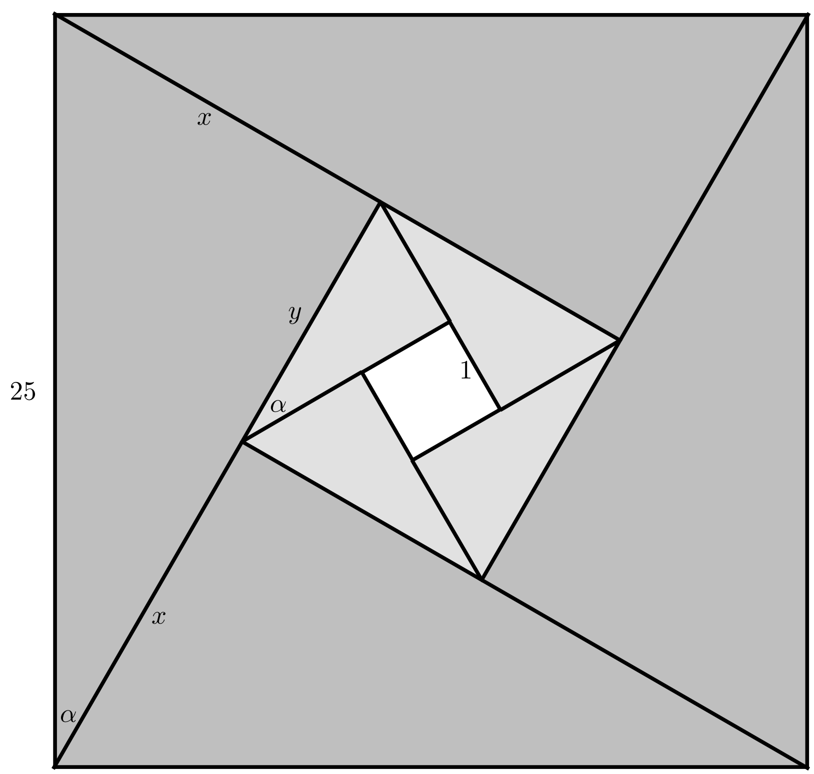
$\boxed{16}$

Kann man alle geradzahligen Gewichte bestimmen, dann kann man auch mit diesen alle ungeradzahligen Gewichte durch Einschachtelung ermitteln, z.B. $12 < \mathbf{13} < 14$. Die geradzahligen Gewichte sind $2, 4, \ldots, 26$, also sind es 13 geradzahlige Gewichte. Würde man umgekehrt die geradzahligen durch die ungeradzahligen Gewichte einschachteln, müsste man 14 Gewichte bestimmen, nämlich $1, 3, 5, \ldots, 27$. Wir ermitteln daher die geradzahligen Gewichte. Anstatt die Gewichte $2, 4, \ldots, 26$ zu bestimmen, genügt es, die Gewichte $1, 2, 3, .., 13$ unter den vorgegebenen Bedingungen zu ermitteln, man muss dann nur Kilo durch Doppelkilo ersetzen. Sei g ein solches Gewicht von $1, \ldots, 13$. Dann lässt es sich (eindeutig) darstellen als gewichtete Summe von Dreierpotenzen in der Form $g = a_0 3^0 + a_1 3^1 + a_2 3^2$

mit $a_0, a_1 = 0,1,2$ und $a_2 = 0,1$ ('Dreiersystem'). Somit versuchen wir es mit den Gewichten $1,3$ und 6, bzw. dann mit den Doppelgewichten $2,6,18$. Würde man diese Gewichte zur Verfügung haben, braucht man sie nur auf einen Arm der Balkenwaage legen, um das unbekannte Gewicht zu bestimmen. Nun haben wir $2 \cdot 3^0$ und $2 \cdot 3^1$ als direkte Gewichte nicht zur Verfügung. Aber: Es ist $2 = 3$–1! Ist also einer der Koeffizienten $a_0, a_1 = 2$ so ersetzen wir die Darstellung wie in folgendem Beispiel gezeigt: $5 = 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 = (3-1) \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 = (-1) \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 == (-1) \cdot 3^0 + (3-1) \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 = (-1) \cdot 3^0 + (-1) \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$ Legt man also zu den 5 kg die $(3^0 + 3^1) = 4$ kg hinzu und $3^2 = 9$ kg auf den anderen Arm, so ist die Balkenwaage austariert. Die Gewichte sind also : 2kg, 6kg, 18kg.

$\boxed{17}$

Die Seitenlänge des mittleren Quadrates sei y.



Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ist dann $\frac{25}{y} = \frac{y}{1}$, also $y = 5$. Hieraus ergibt sich $25^2 = x^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 10x + 25$. Damit ist $x = 15$.

$\boxed{18}$

Es gibt keine Ebene, die durch alle vier Ecken des Tetraeders verläuft. Daher gibt es auch keine Ebene, die den gleichen Abstand zu den vier Ecken hat und sodass alle vier Ecken auf derselben Seite von der Ebene liegen. Somit teilt jede Ebene, die den gleichen Abstand zu den vier Ecken hat, die vier Ecken in zwei Gruppen auf. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder enthält jede Gruppe zwei Ecken oder eine Gruppe enthält drei und die andere nur eine. Es gibt drei Möglichkeiten um die Ecken in zwei Gruppen mit jeweils zwei Ecken aufzuteilen. Zu jeder Aufteilung gehört dann genau eine Ebene, die den gleichen Abstand zu den vier Ecken hat und die Ecken gemäß der Aufteilung auf die Gruppen verteilt. Angenommen die erste Gruppe enthält die Punkte A und B und die andere Gruppe enthält die Punkte C und D. Dann verläuft die dazugehörige Ebene parallel zu den Kanten AB und CD und durch die Mitten der Kanten AC, AD, BC und BD. Es gibt ferner vier Möglichkeiten um die Ecken in eine Gruppe mit drei Ecken und eine Gruppe mit nur einer Ecke aufzuteilen. Auch zu diesen Aufteilungen gehört jeweils genau eine Ebene. Angenommen die erste Gruppe enthält die Punkte B, C und D und die andere Gruppe enthält den Punkt A. Dann verläuft die dazugehörige Ebene parallel zur Seitenfläche BCD und durch die Mitten der Seiten AB, AC und AD. Insgesamt gibt es also 7 Ebenen, die den gleichen Abstand zu den vier Ecken des Tetraeders besitzen.

$\boxed{19}$

Es soll gelten $5a^2 - 4b^2 = 1$ mit natürlichen Zahlen $a > 1$ und b. Da $b^2 = \frac{5}{4} \cdot (a^2 - 1)$, ist $b > a$, d.h. $b = a + c$, wobei c eine natürliche Zahl, also > 0, ist. Dies liefert: $5a^2 - 4(a + c)^2 = 1$ und somit $a^2 - 8ac - (4c^2 + 1) = 0$. Also $a = 4c \pm \sqrt{20c^2 + 1}$. $c = 2$ liefert sofort die Lösung $a = 8 + 9 = 17$ und $b = 19$.

$\boxed{20}$

Sei B die Anzahl der Blüten, S die Anzahl der Stiele und V die Anzahl der Stiele. Dann gilt: Jeder Stiel trägt entweder eine Verzweigung oder eine Blüte, also $S = V + B$.Aus jeder Verzweigung wachsen mit Ausnahme des Hauptstammes 2 Stiele, d.h. $S = 2V + 1$. Damit: $S = 2B - 1$. Sei b die Anzahl der Blüten vor Oles Aktion, a die Anzahl der abgeschnittenen Blüten. Dann gilt nach letztem Satz im Text: $b - a + 2 \cdot 5 = \frac{b}{2}$, d.h. $a = \frac{b}{2} + 10$ wie auch $2 \cdot \frac{b}{2} - 1 = \frac{29}{59}(2b - 1)$, was auf $b = 30$ und $a = 25$ führt. Florentine feiert also ihren 25. Geburtstag.