

Universität
zu Köln



universität**bonn**

iRace *illegal racing*



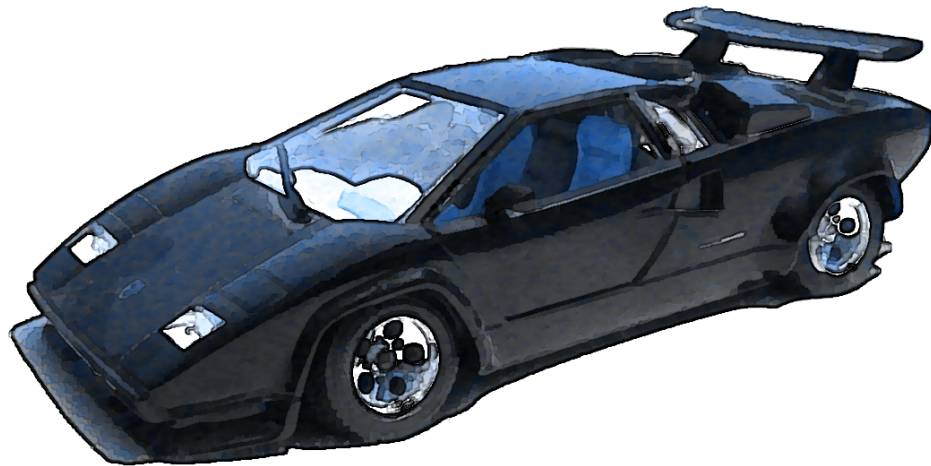
iRace - Illegal Racing

Der große Moment ist gekommen. Heute wird das lange erwartete Straßenrennen in der Rennersdorfer Innenstadt ausgetragen. Dabei werdet ihr gegen ein anderes Team antreten. Doch zunächst werdet ihr ein paar Vorkehrungen treffen, damit am Ende nicht noch die anderen gewinnen...

Die **Aufgaben 1 bis 4** befassen sich mit eben diesen Vorbereitungen. Sie sind unabhängig voneinander zu lösen und bringen euch insgesamt bis zu **500 Punkte** ein. Die Antworten zu diesen Aufgaben sind auf dem beigelegten **Antwortblatt** zu notieren, welches bereits nach 65 Minuten, **um 14.50 Uhr, eingesammelt** wird. Die Zeit ist sehr knapp. Verteilt die Arbeit daher sinnvoll im Team!

Anschließend werden in einer zehnminütigen Umbauphase je zwei Tische zusammengerückt und die Rennstrecken verteilt. Um **15.00 Uhr beginnt** dann das **Rennen als Finale** (siehe S. 11 und 12). Es dauert maximal eine halbe Stunde. Die Regeln des Rennens müssen bis zum Start bereits gut verstanden sein.

Achtung: Nur die Aufgaben 1 bis 4 gehen (neben der Staffel vom Vormittag) in die Punktwertung des Mathematikturniers ein! Die Siegerteams der Rennen bekommen einen kleinen Überraschungspreis, unabhängig von der Punktwertung des Mathematikturniers.



Aufgabe 1: Ohne Leute wenig Beute.

Bevor ihr nach Rennersdorf aufbrecht, wo das Rennen stattfindet, wollt ihr in eurem Heimatort, Lahmhausen, möglichst viele Fans möglichst schnell abholen. Dabei fahrt ihr mit 5 Bussen durch die Straßen. Ein gegnerisches Team ist ebenfalls in den Straßen unterwegs, um seine Fans einzusammeln.

Jede Straße kann in beide Richtungen befahren werden. An den Kreuzungen wird der Verkehr durch Ampeln geregelt, wobei die Länge der Rotphasen einer Ampel genau der Länge ihrer Grünphasen entspricht. Zu jedem Zeitpunkt steht eine Ampel entweder in ($\downarrow$)Richtung auf Grün (und in ($\leftrightarrow$)Richtung auf Rot) oder in ($\leftrightarrow$)Richtung auf Grün (und in ($\downarrow$)Richtung auf Rot).

Einem Freund ist es gelungen, das örtliche Ampelnetzwerk zu hacken. Er kann nun für jede Ampel die Zeit T , die sie (für eine der beiden Straßen) auf Grün steht, und die Phasenverschiebung Δ einstellen. Dies ist die Zeit, die vergeht, bis die Ampel in ($\downarrow$)Richtung das erste Mal auf Grün springt (vom Zeitschritt 0 an gemessen). Für jede Ampel ist T entweder 1, 2, oder 3 und es gilt $0 \leq \Delta < 2T$. In der Tabelle 1 geben wir ein Beispiel für $T = 3$ und $\Delta = 5$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\downarrow$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$

Tabelle 1: Beispiel einer Ampel mit $T = 3$ und $\Delta = 5$. Der Pfeil in Spalte n gibt an, in welche Richtung der Verkehr von Zeitschritt n nach Zeitschritt $n + 1$ fahren darf.

Euer Freund soll nun die Ampeln so einstellen, dass die Busse mit euren Fans komplett ungehindert durch den Verkehr kommen, also weder aufgrund von anderen Bussen noch aufgrund von roten Ampeln bremsen müssen. Die Busse der Gegner sollen hingegen an jeder Ampel mindestens einen Zeitschritt lang Rot sehen.

In Abbildung 1 ist ein Straßenplan von Lahmhausen abgebildet. Darauf ist die Situation zum Zeitschritt 0 dargestellt. Wir arbeiten dabei mit einer 'Straße' als fester Längeneinheit (in der Karte eingezeichnet) und mit den oben genannten Zeitschritten. Ein weißer Pfeil steht für einen von euren Bussen, ein grauer für einen gegnerischen. Es gelten folgende Regeln:

- Wir arbeiten nur mit ganzen Zeiteinheiten.
- Ein Bus nimmt eine ganze Straße in *seiner* Fahrtrichtung in Beschlag.
- Aber auf jeder Straße kann sich gleichzeitig in *zwei verschiedenen* Richtungen ein Bus befinden.
- An jeder Kreuzung wird immer geradeaus weiter gefahren.
- Ein Bus steht entweder still oder bewegt sich mit Geschwindigkeit 1 (d.h. eine Straße pro Zeitschritt).

- Zu jedem Zeitschritt 1,2,3,... wird die Situation für alle Busse gleichzeitig aktualisiert.
- Wie im NaSch-Modell, darf ein Bus zum nächsten Zeitschritt $n + 1$ in die nächste Straße einfahren, wenn diese zum aktuellen Zeitpunkt n weder von einer roten Ampel noch von einem Bus versperrt wird.

Der letzte Punkt bedeutet dabei z.B., dass der graue Bus ganz oben rechts in Abb. 1 momentan noch nicht losfahren darf. Er muss so lange warten, bis der weiße Bus vor ihm sich eine Straße weiter zu Ampel D hin verschoben hat.

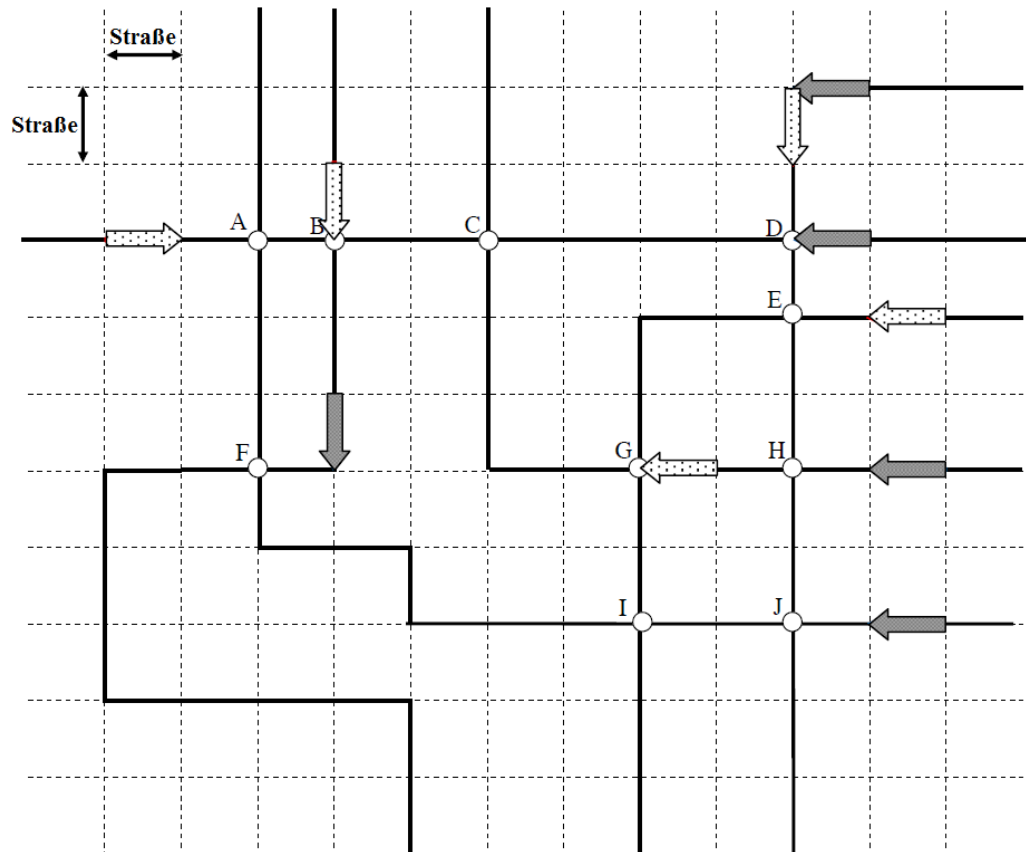


Abbildung 1: Busse in der Lahmhausener Innenstadt (Zeitschritt 0).

Aufgabe 1: Koordiniert nun für alle 10 Ampeln T und Δ derart, dass alle eure Busse durch die Straßen gelangen, ohne jemals anhalten zu müssen. Außerdem soll jeder gegnerische Bus an jeder Ampel, die er passiert, mindestens einen Zeitschritt lang Rot sehen. Tragt für jede Ampel beide Parameter in die Tabelle des Antwortblattes ein.

Tipp: Macht euch ggf. für jede Ampel eine Übersicht wie in Tabelle 1.

Für jede richtig eingestellte Ampel gibt es 15 Punkte.

Aufgabe 2: Wer zuerst kommt, mahlt zuerst.

Nach dem Einsammeln der Fans wollt ihr von Lahmhausen (L) nach Rennersdorf (R) in möglichst kurzer Zeit gelangen. In Abbildung 2 ist eine Skizze mit verschiedenen Orten und Verbindungen gegeben. Alle Straßen können in beide Richtungen befahren werden.

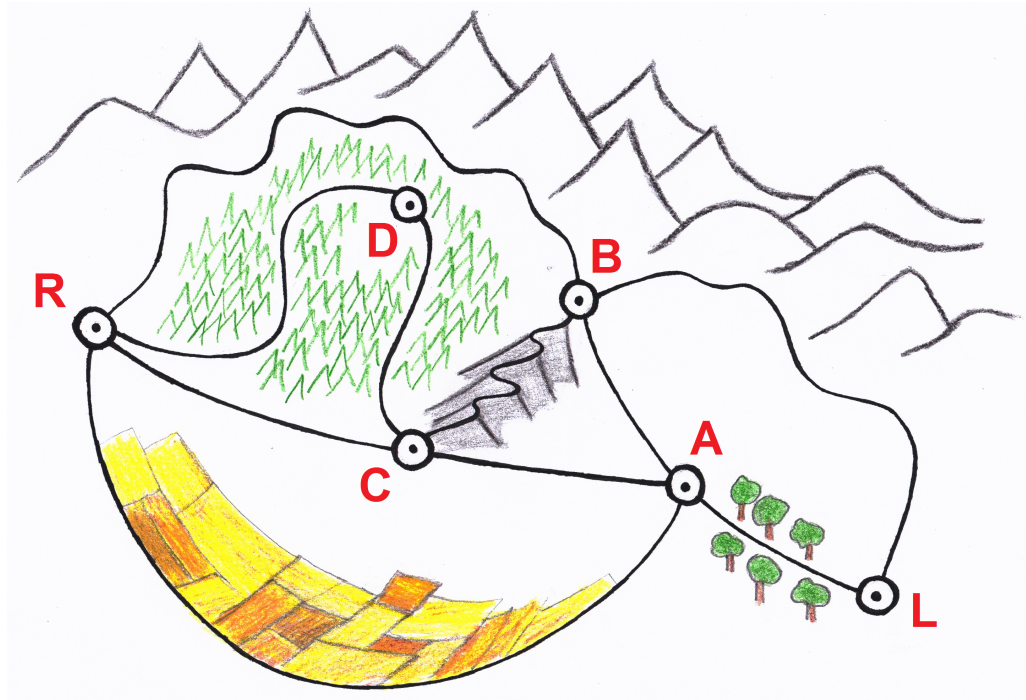


Abbildung 2: Verschiedene Routen von Lahmhausen nach Rennersdorf.

Für den Fluss J (gemittelte Anzahl an Autos, die einen festen Punkt pro Zeiteinheit durchfahren), die Dichte ρ (gemittelte Anzahl an Autos pro Längeneinheit) und die Geschwindigkeit v gilt die Beziehung $J = v\rho$. Wenn nicht anders angegeben, sind Fluss, Dichte und Geschwindigkeit stets in ZA-Einheiten gegeben. Dabei entspricht eine Längeneinheit einer Zelle (mit einer realen Länge von 7,5 m) und eine Zeiteinheit hat eine Dauer von 1 s. Wir nehmen an, dass jedes Auto genau eine Zelle in Beschlag nimmt.

Auf jedem Abschnitt gibt es einen Trödefaktor p , welcher der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass ein Auto versehentlich zu langsam fährt. Es gilt $0 \leq p < 1$. Wäre die Geschwindigkeit (in ZA-Einheiten) ohne Trödeln v'' , dann ist die tatsächliche Geschwindigkeit v mit Wahrscheinlichkeit p gleich $\max(0, v'' - 1)$ und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ gleich v'' . Die erwartete Geschwindigkeit ergibt sich damit zu $p \cdot \max(0, v'' - 1) + (1 - p) \cdot v''$.

Überholvorgänge und Spurwechsel lassen wir bei Berechnungen außer Acht.

Damit die Polizei nicht schon vor dem Rennen auf euch aufmerksam wird, dürfen **Tempolimits**, wenn vorhanden, auf gar keinen Fall überschritten werden! Auch dann nicht, wenn der zuvor beobachtete Verkehr dies tun sollte! Im umgekehrten Fall, also wenn der vorhandene Verkehr sich langsamer als das Tempolimit bewegt (zähfließender Verkehr oder Stau), dann ist die aktuell vorliegende Durchschnittsgeschwindigkeit der Autos auch die eigene. Also: $v = \min(v_{\text{Verkehr}}, v_{\text{max}})$.

Beachtet außerdem, dass euer **Spritvorrat** nur noch für 29,5 km reicht. Ein zwischenzeitlicher Tankstopp kostet zu viel Zeit und ist daher vor dem Erreichen von Rennersdorf nicht akzeptabel.

Folgende Daten konnten zu den verschiedenen Streckenteilen ermittelt werden:

LA (Bundesstraße 1): Die Länge dieser Strecke beträgt 4,2 km. Der Verkehr verläuft zweispurig mit $p = 0,1$. Auf beiden Spuren wurde eine Verkehrsdichte von $\rho = 0,9$ gemessen. Das Tempolimit beträgt 135 km/h. Wegen der sehr hohen Dichte würde sich der Verkehr, wenn $p = 0$ wäre, in einer Sekunde exakt um den durchschnittlichen Abstand zum Vordermann nach vorne bewegen.

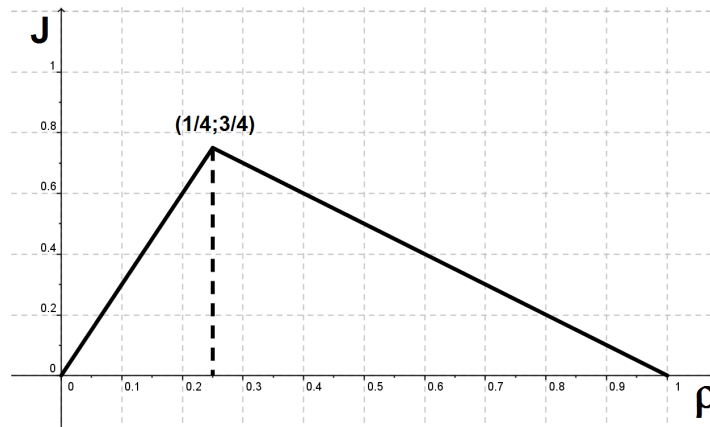
LB (Gebirgsstraße 1): Auf dieser einspurigen, 9 km langen Strecke gilt ein Tempolimit von 81 km/h. Ein Kontrollpunkt wird alle 4 s von einem Auto durchfahren, wobei auf Luftbildern im Durchschnitt alle 90 m ein Auto auszumachen ist.

AB (Bundesstraße 2): Diese Straße besitzt wie **LA** eine Länge von 4,2 km und ein Tempolimit von 135 km/h. Da dieser Abschnitt zurzeit nicht sehr stark befahren ist, würde der Verkehr, falls $p = 0$ wäre, mit Maximalgeschwindigkeit fahren. Tatsächlich beträgt der Trödefaktor allerdings $p = 1/3$.

AR (Landstraße 1): Auf dieser einspurigen, 16,2 km langen Landstraße gilt ein Tempolimit von 81 km/h. Mittels Induktionsschleifen wurde eine Belegungszeit von 3 min bei einer Gesamtmesszeit von 1 h gemessen. In dieser Zeit überfuhren 720 Autos den Detektor.

BR (Gebirgsstraße 2): Der zweite Teil der Gebirgsstraße ist ebenfalls einspurig und es gilt dasselbe Tempolimit von 81 km/h. 12,6 km lang schlängelt sich diese Route hoch über den Dächern der Dörfer. Weil die Autos hier äußerst vorsichtig fahren, entspricht deren Geschwindigkeit dem Abstand zum Vordermann. Der Fluss J beträgt $2/3$ und es gilt $p = 0$.

AC (Landstraße 2): Diese einspurige Straße besitzt eine Länge von 5,4 km. Die Autos werden nicht von ihren Vorgängern beeinflusst. Der gesuchte Punkt (ρ, J) befindet sich daher auf dem Freiflussast des folgenden, gemessenen Fundamentaldiagramms:



BC (Steiler Hang): Aufgrund der sehr gefährlichen Abhänge wird hier durchschnittlich mit einer Geschwindigkeit von nur 43,2 km/h gefahren. Zusätzlich sind folgende Informationen bekannt: Es gibt einen Weg von **L** nach **C**, der 14,7 km lang ist. Außerdem ist **BC** kürzer als der längere Waldweg.

CR (Landstraße 3): Auf dieser 6,3 km langen Landstraße herrscht ein Tempolimit von 81 km/h. Aufgrund eines erhöhten Verkehrsaufkommens wird hier allerdings nur halb so schnell gefahren wie auf der Strecke **DR**.

CD (Waldstraße 1): Diese verlassene Waldstraße ist 5,4 km lang. Aufgrund der ungemütlichen und dunklen Atmosphäre wird hier sehr wachsam gefahren ($p = 0$). Zudem könnte der aktuell gemessene Fluss von $J = 4/5$ nicht höher sein. Der Abstand zwischen zwei Autos entspricht also genau der Maximalgeschwindigkeit.

DR (Waldstraße 2): Diese Fortsetzung der ersten Waldstraße ist $2/3$ so lang wie die kürzere Gebirgsstraße. Auf beiden Waldstraßen wird mit der gleichen Geschwindigkeit gefahren.

Aufgabe 2: Beantwortet folgende Fragen im Rahmen der obigen Bedingungen:

a) Wie lange (in Sekunden) dauert die direkte Verbindung von **A** nach **B** (Bundesstraße 2) und wie schnell (in km/h) könnt ihr dort fahren?

b) Wie lange (in Sekunden) dauert die direkte Verbindung von **A** nach **C** (Landstraße 2) und wie schnell (in km/h) könnt ihr dort fahren?

c) Welche Route von **L** nach **R** besitzt die größte Durchschnittsgeschwindigkeit?

d) Welche Route führt euch in kürzester Zeit von **L** nach **R**?

Gebt die Antworten für c) und d) folgendermaßen an:

Beispiel: „Von **L** nach **E** nach **G** nach **R**“ → Code: „**LEGR**“

Es lassen sich hier maximal 25+25+50+50 Punkte verdienen.

Aufgabe 3: Garten Eden in der Innenstadt.

Die Polizei führt in Rennersdorf stichprobenartig Verkehrsüberwachungen durch. Dabei nehmen Spezialkameras automatisch einige hintereinander fahrende Autos und deren Geschwindigkeiten auf. Die Daten werden in Form eines Datenstreifens gespeichert, ausgewertet und eventuelle Regelverstöße bestraft.

Auch in Rennersdorf habt ihr einen Hacker zum Freund. Er hat sich in das örtliche Polizeinetzwerk gehackt und Datenstreifen, auf welchen sein Auto abgebildet ist, als Poster an die Wand geheftet. Meistens, so sagt er, habe er sich auf den Aufnahmen sogar zufällig im erlaubten Geschwindigkeitsbereich bewegt. Nur zwei Mal 'musste' er nachträglich in die Software eingreifen und hat auf den entsprechenden Datenstreifen den Geschwindigkeitswert seines Autos nach unten 'korrigiert'.

Poster	→ Fahrtrichtung →														
A	.	2	.	.	2	.	.	2	.	.	2	.	.	.	3
B	1	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	.	4	.	.
C	1	.	.	2	.	.	1	.	.	2	.	.	1	.	.
D	4	.	.	.	3	.	.	.	2	.	.	2	.	.	2
E	2	.	1	0	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	3
F	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	4	.	.	2
G	1	0	0	.	0	.	0	.	0	.	1	.	1	0	0
H	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	2	.
I	.	.	4	.	.	.	3	.	.	2	.	.	2	.	.
J	.	.	4	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	4	.

Tabelle 2: Schematische Darstellung der Daten auf den Postern A bis J.

Wir gehen davon aus, dass die Autos nach den Regeln des folgenden NaSch-Modells mit $v_{\max} = 4$ fahren:

Schritt 1: Beschleunigen: $v'(\tau + 1) := \min(v(\tau) + 1, v_{\max})$

Schritt 2: Bremsen: $v(\tau + 1) := \min(v'(\tau + 1), d(\tau))$

Schritt 3: Fahren: $x(\tau + 1) := x(\tau) + v(\tau + 1)$

Dabei sind v , x und d jeweils Geschwindigkeit, Ort und Distanz zum Vordermann. Es gilt außerdem eine **Zusatzregel**: Falls $v(\tau) = 0$, dann kann auch $v(\tau + 1) = 0$ sein, selbst, wenn die nächste Zelle frei ist (ein stillstehendes Auto kann eine Weile stehen bleiben). Beachtet auch, dass es sich jeweils nur um Ausschnitte aus langen Straßen handelt. Daher sind die Ränder auch nicht periodisch und das Geschehen außerhalb der gezeigten Bereiche ist nicht relevant.

Aufgabe 3: Euer Freund war beim Fälschen der Geschwindigkeitswerte zu unachtsam: Bei jeder 'Korrektur' eines Posters ist dort ein unerreichbarer Zustand entstanden. Gebt als Lösung an, bei welchen 2 Autos die Geschwindigkeit nach unten korrigiert wurde. Bsp.: Poster X, drittes Auto von links → Code: „X3“

Bei dieser Aufgabe könnt ihr euch maximal 100 Punkte verdienen: Jedes korrekt identifizierte Poster bringt euch 20 Punkte ein. Habt ihr auf dem Poster auch das richtige Auto erwischt, gibt es weitere 30 Punkte.

Aufgabe 4: Leben im dreidimensionalen Raum.

Der Hacker, der euch eben stolz seine Polizeibilder präsentierte, hat im wahrsten Sinne des Wortes 'noch mehr auf Lager'. Seine neueste Erfindung ist der Prototyp eines neuen Getriebes, welches eine stark verbesserte Beschleunigung ermöglicht.

Das Getriebe ist hinter einer Spezialtüre gelagert. Vor der Türe leuchten zwei (übrigens eng miteinander verwandte!) Hologramme auf. Sie stellen jeweils einen zellulären Automaten in Form eines aus 27 Zellen bestehenden Würfels mit Seitenlänge 3 dar und sind unten schematisch dargestellt. Zur besseren Übersicht haben wir beide Würfel jeweils in drei Scheiben zerlegt, welche in Wirklichkeit natürlich direkt übereinander liegen.

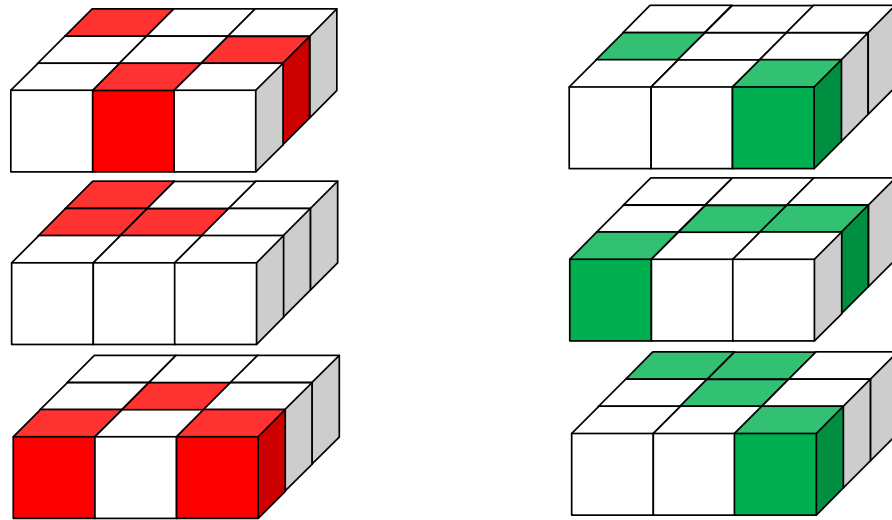


Abbildung 3: Zwei Hologramme stehen zwischen euch und dem Getriebe.

Es gelten die gleichen Spielregeln wie beim zweidimensionalen Game of Life, wobei hier periodische Randbedingungen vorhanden sind. Man muss sich also die oberste Schicht als Fortsetzung der untersten, die linke als Fortsetzung der rechten und die vorderste als Fortsetzung der hintersten denken. Somit besitzt jede der kubischen Zellen 6 Von Neumann Nachbarn (mit denen sie jeweils genau eine ganze Seitenfläche gemeinsam hat). Lebende Zellen sind gefärbt. Es gilt hier das Regelwerk 234/34. D.h., dass eine lebende Zelle mit weniger als 2 und mehr als 4 lebenden Nachbarn stirbt, eine lebende mit 2 bis 4 lebenden Nachbarn überlebt und eine tote Zelle mit genau 3 oder 4 lebenden Nachbarn zum Leben erweckt wird. Neben den Hologrammen steht eine Nachricht: „ZWEI ZEITEN VERGEHEN BIS ZUM GLÜCK!“

Aufgabe 4: Tragt für beide Würfel die Ergebnisse nach dem zweiten Iterationsschritt auf dem Antwortblatt ein, indem ihr die lebenden Zellen ausmalt.

Für jeden komplett richtig iterierten Würfel gibt es 50 Punkte.

Zusatzaufgabe: Das Rennen.

Rasen ohne Limit, den Zivilverkehr ignorieren, die gesamte Innenstadt von Rennersdorf in Schutt und Asche legen...

Das hättet ihr wohl gerne! Werdet erst einmal alle volljährig! In Wahrheit habt ihr es erfolgreich geschafft, den **Jahrmarkt von Rennersdorf** zu erreichen. Dort dürft ihr auf dem **Kinder-Autoscooter** gegen ein anderes Team antreten!

Zeitplan:

Um **14.50 Uhr** reicht ihr die Aufgaben 1 bis 4 bei der Rennleitung ein. Es werden je zwei benachbarte Tische (samt Mannschaften) zusammengeschoben und die Spielbretter verteilt: Eine bedruckte Pinnwand wird als Fahrbahn dienen, Pins als Autos. Um **15.00 Uhr** beginnt das Rennen. Es dauert maximal 30 Minuten, bis **15.30 Uhr**. Sollte euer Rennen bereits vorzeitig zu Ende sein, dann bleibt bitte leise auf euren Plätzen sitzen, bis auch die anderen Gruppen fertig sind.

Wer gewinnt das Rennen?

Nur Autos, die es innerhalb der 30 Minuten ins Ziel geschafft haben, erhalten die ihrer Platzierung entsprechenden Punkte aus der untenstehenden Tabelle. Diese **Punkte zählen nicht für die Wertung des Mathematikturniers**. Dasjenige der beiden Teams, welches am Ende die meisten dieser Rennpunkte besitzt, gewinnt das Rennen und bekommt einen kleinen Überraschungspreis. Bei Punktgleichstand nach 30 Minuten hat das Team mit dem erstplatzierten Auto gewonnen.

Platzierung	1.	2.	3.	4.	5.
Punkte	10	8	6	4	2

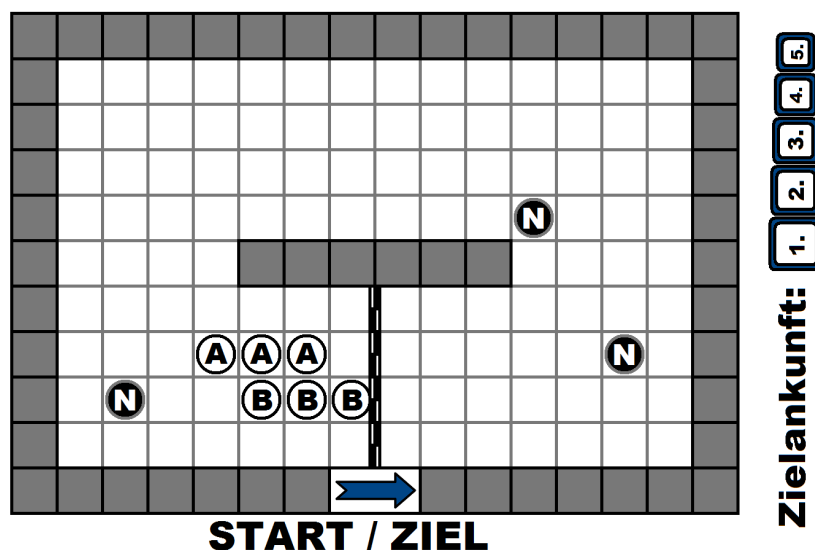


Abbildung 4: Es wird eine Runde auf dem Kinder-Autoscooter gedreht. Die Startpositionen der Teams A und B, sowie der drei neutralen Autos N, sind eingezeichnet.

Rennstrecke und Regeln:

Es wird auf dem in Abb. 4 gezeigten Parcours nach folgenden Regeln gefahren:

- Jedes Team bekommt **drei eigene Autos** (in Form von Pinns) zu Verfügung gestellt. Zusätzlich gibt es **drei neutrale Autos**, die von beiden Teams bewegt werden können.
- Ziel ist es, mit jedem eigenen Auto **eine Runde** (ab der Start-/Ziellinie) zu absolvieren und dabei möglichst **gute Platzierungen** zu erreichen.
- Die Teams dürfen abwechselnd ziehen. Ein solcher **Zug** besteht dabei aus **zwei Teilzügen**: Zuerst darf man eines der eigenen Autos bewegen. Danach darf man eines der neutralen Autos bewegen. Dann erst ist das andere Team an der Reihe. Es gelten folgende Regeln:
 - Besetzte Felder und graue Felder werden nicht betreten.
 - Ein Auto darf sich in alle 4 Richtungen (horizontal und vertikal, nicht diagonal) bewegen, sofern der entsprechende Weg frei ist.
 - Die Autos beschleunigen gut: Man kann bei einem Zug nach Belieben um 0, 1, oder 2 Felder fahren, sofern der entsprechende Weg frei ist.
 - Beim Zug um 2 Felder darf der zweite Schritt in eine andere Richtung erfolgen als der erste.
 - Nachdem man ein neutrales Auto bewegt hat, darf man in demselben Zug nicht mehr ein eigenes Auto bewegen.
 - Ein regelkonform umgestecktes Auto darf nicht wieder zurückgesteckt werden. Hat man einen Pinn einmal regelkonform ausgesteckt, dann darf man sich nicht mehr umentscheiden.
- Zu **Beginn des Rennens** wird einmalig gewürfelt: Der Sieger darf wählen:
 - a) Entweder er darf den ersten Zug machen, oder...
 - b) ... er darf sich aussuchen, ob er Startposition A oder B einnehmen möchte. Der 'Würfelverlierer' bekommt dann den anderen 'Bonus' zugesprochen.
- **Ein Zug** darf eine Gesamtdauer von **30 Sekunden** nicht überschreiten. Ansonsten wird der komplette Zug rückgängig gemacht und das andere Team ist dran. Verzichtet aus Fairnessgründen auf absichtliche Trödelei.
- Ein Team-Auto, das eine Runde absolviert hat, wird dauerhaft auf das entsprechende Feld bei 'Zielankunft' gesetzt. Das **Rennen endet** entweder
 - nach 30 Minuten (aktueller Zug darf dann noch ausgeführt werden),
 - oder vorzeitig, wenn ein Team mehr als 15 Punkte besitzt.
- Vor Beginn des Rennens bestimmt jedes Team **einen Rennfahrer**: Nur er darf Pinns umstecken. Zudem besitzt jedes Team **einen Zeitnehmer**: Er stoppt mithilfe der mitgebrachten Stoppuhr **für alle sichtbar** die 30 Sekunden für die Züge des Gegnerteams. Alle anderen beraten und überwachen die Regeln.

Lösungen zu den Wettbewerbsaufgaben - Sum of Us 2012

Ausführliche Darstellung

Aufgabe 1:

Alle weißen Busse fahren ungehindert mit $v = 1$ durch die Straßen. Dadurch lassen sich sofort die Ampelschaltungen zu den Durchfahrtszeiten bestimmen. Für graue Busse lässt sich analog nur bis zur jeweils ersten Ampel vorgehen: Da diese auch mehr als einmal hintereinander rot sein darf, ist das jeweilige Eintreffen an weiteren Ampeln zeitlich noch nicht eindeutig definiert. Auf diese Weise entstehen folgende Parameter (w bzw. g bedeutet, dass die Info aus einem *weißen* bzw. *grauen* Bus folgte):

$$\begin{aligned} A(1) &= \leftrightarrow (w), \\ B(0) &= \uparrow (w), B(2) = \leftrightarrow (w), \\ C(4) &= \leftrightarrow (w), C(5) = \uparrow (w), \\ D(0) &= \uparrow (g), D(1) = \uparrow (w), D(3) = \leftrightarrow (wg^*), D(8) = \leftrightarrow (w), \\ E(1) &= \leftrightarrow (w), E(2) = \uparrow (w), \\ F(1) &= \uparrow (g), F(2) = \leftrightarrow (wg^*), F(4) = \leftrightarrow (w), \\ G(0) &= \leftrightarrow (w), G(5) = \uparrow (w), \\ H(1) &= \uparrow (g), H(4) = \uparrow (w), \\ I(7) &= \uparrow (w), \\ J(1) &= \uparrow (g), J(6) = \uparrow (w). \end{aligned}$$

Die beiden mit Sternchen markierten Informationen basieren auf logischen Schlussfolgerungen: $D(3)$ ergibt sich aus der Tatsache, dass der graue Bus wegen dem unmittelbar vor ihm fahrenden weißen zunächst auf jeden Fall einen Zeitschritt lang warten muss und erst dann losfahren kann. $F(2)$ lässt sich festlegen, da sich drei Abschnitte hinter dem grauen Bus ein weißer befindet: Bei $t = 1$ muss der graue Bus an der Ampel F anhalten. Dabei rückt der weiße Bus ein Stück näher. Bei $t = 2$ muss der graue Bus dann unbedingt wieder fahren dürfen, da ansonsten der weiße von ihm aufgehalten werden würde.

Beginnend mit Ampel D können nun sukzessive die Parameter anderer Ampeln bestimmt werden, da mit jeder festgelegten Schaltung meist der Startzeitpunkt eines grauen Busses an dieser Ampel definiert wird.

- 1) $T_D = 3, \Delta_D = 5 \Rightarrow C(6) = \uparrow, E(6) = \leftrightarrow$
- 2) $T_E = 3, \Delta_E = 2 \Rightarrow H(10) = \leftrightarrow$
- 3) $T_H = 2, \Delta_H = 0 \Rightarrow G(4) = \uparrow, J(14) = \leftrightarrow$
- 4) $T_G = 3, \Delta_G = 3, T_J = 3, \Delta_J = 5 \Rightarrow C(11) = \leftrightarrow, I(4) = \uparrow$
- 5) $T_C = 2, \Delta_C = 1, T_I = 2, \Delta_I = 3 \Rightarrow B(9) = \uparrow, F(12) = \leftrightarrow$
- 6) $T_B = 2, \Delta_B = 0, T_F = 1, \Delta_F = 1 \Rightarrow A(11) = \uparrow, A(16) = \leftrightarrow$
- 7) $T_A = 2, \Delta_A = 2$

Aufgabe 2:**LA:**

$$\text{Für } p = 0 \text{ wäre } v = v'' = d: \quad \rho = \frac{1}{d+1} = \frac{1}{v''+1} \quad \Rightarrow \quad v'' = \frac{1}{\rho} - 1 = \frac{1}{0,9} - 1 = \frac{1}{9}$$

$$\text{Da aber } p = 0,1 \text{ ist, folgt: } v = p \cdot \max(0, v'' - 1) + (1-p) \cdot v'' = 0 + (1-0,1) \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow v_{\text{real}} = \frac{1}{10} \frac{\text{Längeneinheit}}{\text{Zeiteinheit}} = \frac{1}{10} \frac{7,5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 0,75 \text{ m/s} = \underline{2,7 \text{ km/h}} \leq v_{\text{max}}$$

$$v = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4200 \text{ m}}{0,75 \text{ m/s}} = \underline{5600 \text{ s}}$$

LB:

$$J = \frac{1}{4 \text{ s}}, \quad \rho = \frac{1}{90 \text{ m}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{J}{\rho} = 22,5 \text{ m/s} = \underline{81 \text{ km/h}} \leq v_{\text{max}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v} = \underline{400 \text{ s}}$$

AB:Für $p = 0$ wäre $v = v'' = v_{\text{max}} = 5$. Da aber $p = 1/3$ ist, folgt:

$$v = p \cdot \max(0, v'' - 1) + (1-p) \cdot v'' = \frac{1}{3} \cdot 4 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 5 = \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow v_{\text{real}} = 35 \text{ m/s} = \underline{126 \text{ km/h}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4200 \text{ m}}{35 \text{ m/s}} = \underline{120 \text{ s}}$$

AR:

$$\rho = \frac{t}{T} \frac{1}{l} = \frac{3 \text{ min}}{1 \text{ h}} \frac{1}{7,5 \text{ m}} = \frac{1}{150 \text{ m}}; \quad J = \frac{720}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{5 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow v_{\text{Verkehr}} = \frac{J}{\rho} = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h} > v_{\text{max}} \quad \Rightarrow \quad v = \underline{81 \text{ km/h}} \quad \Rightarrow \quad t = \underline{720 \text{ s}}$$

BR:

$$J = \rho v = \frac{1}{d+1} v = \frac{v}{v+1} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{J}{1-J} = 2$$

$$\Rightarrow v_{\text{real}} = 15 \text{ m/s} = \underline{54 \text{ km/h}} \leq v_{\text{max}} \quad \Rightarrow \quad t = \underline{840 \text{ s}}$$

AC:

$$v = \frac{J}{\rho} = \frac{3/4}{1/4} = 3 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{real}} = 22,5 \text{ m/s} = \underline{81 \text{ km/h}} \quad \Rightarrow \quad t = \underline{240 \text{ s}}$$

CD:

$$J_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}}}{v_{\text{max}} + 1} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{max}} = \frac{J_{\text{max}}}{1 - J_{\text{max}}} = 4 = v$$

$$\Rightarrow v_{\text{real}} = 30 \text{ m/s} = \underline{108 \text{ km/h}} \quad \Rightarrow \quad t = \underline{180 \text{ s}}$$

DR:

$$x = \frac{2}{3} \cdot 9 \text{ km} = 6 \text{ km}; \quad v = 30 \text{ m/s} = \underline{108 \text{ km/h}} \quad \Rightarrow \quad t = \underline{200 \text{ s}}$$

CR:

$$v = \frac{108 \text{ km/h}}{2} = 15 \text{ m/s} = \underline{54 \text{ km/h}} \leq v_{\max} \Rightarrow t = \underline{420 \text{ s}}$$

BC:

$$\text{von L nach C in } 14,7 \text{ km} \Rightarrow |BC| = \begin{cases} \text{a) } 14,7 \text{ km} - |LA| - |AB| = 6,3 \text{ km} > 6 \text{ km} \\ \text{b) } 14,7 \text{ km} - |LB| = 5,7 \text{ km} < 6 \text{ km} \end{cases}$$

$$\text{kürzer als längerer Waldweg} \Rightarrow x = 5,7 \text{ km}$$

$$v = 12 \text{ m/s} = \underline{43,2 \text{ km/h}} \Rightarrow t = \underline{475 \text{ s}}$$

Fazit: Der zunächst wunderbar erscheinende Weg **LBACDR** besitzt eine Länge von 30 km. Der Tankinhalt reicht für diese Route leider nicht aus. Somit besitzt der Weg **LBAR** die höchste Durchschnittsgeschwindigkeit, wohingegen die Route **LBACR** in der kürzesten Zeit zum Ziel führt. Man benötigt auf diese Weise $t = 1180 \text{ s}$ bis nach Rennersdorf.

Aufgabe 3:

Bei Poster J handelt es sich um einen UZ von zweiter Ordnung. Wir betrachten hierfür die Konstellation $(2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 4)$ genauer:

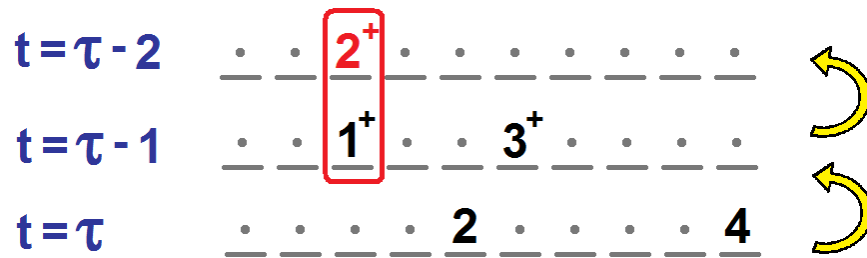


Abbildung 1: Der UZ $(2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 4)$ ist von zweiter Ordnung.

Im Schritt von $t = \tau$ zurück nach $t = \tau - 1$ müssen die Autos stets um den bei $t = \tau$ angezeigten Wert nach hinten wandern. Bei $t = \tau - 1$ muss das rechte Auto dann mindestens eine Geschwindigkeit von 3, das linke von mindestens 1 haben, da die Autos in einem Zeitschritt ihre Geschwindigkeit maximal um 1 erhöhen können. Im 'günstigsten' Fall besitzt das rechte Auto zum Zeitpunkt $t = \tau - 1$ eine Geschwindigkeit von nur 3, da es so am wenigsten weit bei $t = \tau - 2$ nach hinten wandern muss (und das linke Auto daher so wenig wie möglich behindert). Aber selbst in diesem günstigsten Fall ergibt sich ein UZ, da das linke Auto in keinem Fall von $t = \tau - 2$ nach $t = \tau - 1$ auf die dort besetzte Zelle wandern könnte.

Dieser UZ kann nur aufgehoben werden, in dem man die Geschwindigkeit des

mittleren Wagens in der Konstellation $(4, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 4)$ aus dem Poster erhöht. Dann befindet er sich bei $t = \tau - 1$ mindestens eine Zelle weiter hinten, sodass er diese Position auch von $t = \tau - 2$ aus erreichen kann, ohne mit seinem Vordermann in Konflikt zu geraten. Das Auto ganz links besitzt genug Abstand zum mittleren Wagen, um diesen nicht zu behindern. Nur die hier beschriebene Erhöhung der Geschwindigkeit des *mittleren* Wagens kann bei $t = \tau$ den UZ aufheben. Eine Erhöhung der Geschwindigkeiten der anderen Wagen ändert nichts. Das Tempo von **J2** wurde also nach unten 'korrigiert'.

Ebenso wurde Poster F manipuliert. Hier kommt es zu einem UZ von dritter Ordnung. Wir betrachten zunächst die Konstellation $(2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 4)$, in der sich die hinteren beiden Wagen des Posters befinden.

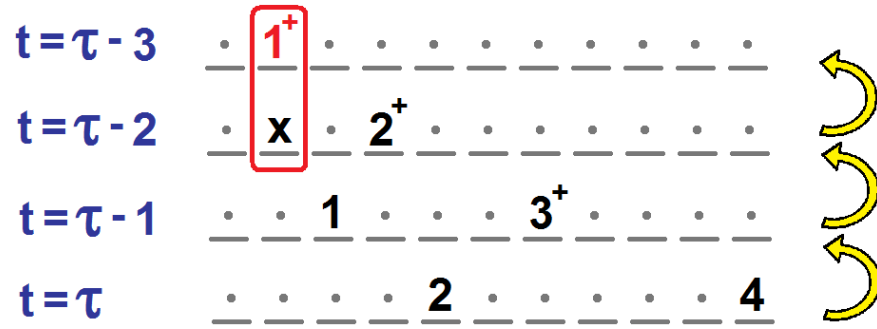


Abbildung 2: Der UZ $(2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 4)$ ist von dritter Ordnung.

Wie oben, muss bei $t = \tau - 1$ der rechte Wagen mindestens die Geschwindigkeit 3 besessen haben, wobei eine Geschwindigkeit von *exakt* 3 'am günstigsten' wäre. Der linke Wagen besaß bei $t = \tau - 1$ *exakt* die Geschwindigkeit 1: Es befanden sich bei $t = \tau - 1$ nämlich drei freie Felder zwischen den Autos. Würde das linke Auto bei $t = \tau - 1$ eine Geschwindigkeit von 2 oder mehr besessen haben, so hätte es nach $t = \tau$ hin diese Lücke voll ausnutzen können und *müssen*. Also war sein Tempo 1 bei $t = \tau - 1$.

Zum Zeitpunkt $t = \tau - 2$ besaß das rechte Auto mindestens eine Geschwindigkeit von 2, das linke Auto befand sich währenddessen mit der (beliebigen) Geschwindigkeit x eine Zelle weiter zurück als zum Zeitpunkt $t = \tau - 1$. Somit war bei $t = \tau - 2$ (maximal) eine freie Zelle zwischen den Autos. Da das rechte Auto aber von $t = \tau - 3$ aus mindestens 2 Zellen gewandert sein muss, bekommen wir hier den Widerspruch.

Das Auto ganz rechts in der Konstellation $(2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 4, \bullet, \bullet, 2)$ aus Poster F ist zu langsam, um von Bedeutung zu sein. Nur durch Erhöhung der Geschwindigkeit des Autos ganz links lässt sich der UZ beseitigen. Die zweite Lösung lautet somit **F1**.

Alle anderen Poster lassen sich aus einem Anfangszustand erzeugen, bei dem alle Autos das Tempo Null besitzen.

Aufgabe 4:

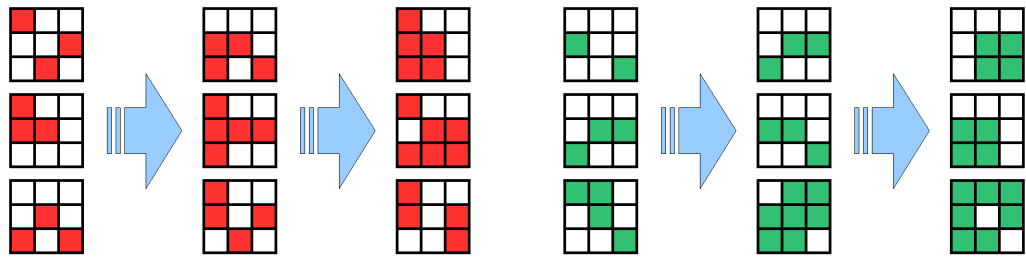


Abbildung 3: Lösung durch Iterieren.

Wenn man die beiden Würfel genauer betrachtet, erkennt man, dass man den rechten Würfel erhält, wenn man den linken ein Mal links herum dreht. Da es sich bei der Drehung um eine lineare Abbildung handelt, kann man das Ergebnis für den rechten Würfel auch erhalten, indem man zuerst das Ergebnis für den linken berechnet und diesen Ergebniswürfel dann auf dieselbe Weise nach links dreht. So kann man sich die Iterationen für den zweiten Würfel sparen.

Übersicht

Aufgabe 1:

Ampel	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
T	2	2	2	3	3	1	3	2	2	3
Δ	2	0	1	5	2	1	3	0	3	5

Aufgabe 2:

- a) $t = 120 \text{ s}$ $v = 126 \text{ km/h}$
- b) $t = 240 \text{ s}$ $v = 81 \text{ km/h}$
- c) LBAR
- d) LBACR

Aufgabe 3:

F1 und J2

Aufgabe 4:

