MATHEMATIK-STAFFEL 2015

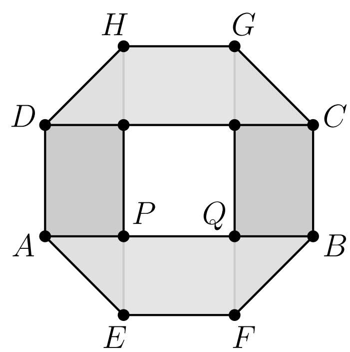
Lösungen

1

Da die Summe von a und c durch 4 teilbar und kleiner als 12 ist, muss diese Summe 4 oder 8 sein. Daher sind a und c entweder die Zahlen 1 und 3 oder die Zahlen 3 und 5. Eine der Zahlen a und c ist also 3.
Da die Summe von b und c durch 3 teilbar ist und $b \neq c$, kann c nicht 3 sein. a muss 3 sein.

2

Nach dem Plattdrücken formen die beiden Ränder des Papierstreifens zwei Rechtecke. Wir bezeichnen die Rechtecke, wie in der untenstehenden Abbildung angegeben, mit $ABCD$ und $EFGH$. Außerdem weisen wir den Schnittpunkten von AB mit EH sowie AB mit FG die Buchstaben P und Q zu.



Da AB senkrecht auf EH steht, müssen die Längen der Strecken AP und EP genauso groß sein, wie die Breite des Papierringes, also 1. AEP ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei P. Die Länge der Strecke AE beträgt also $\sqrt{2}$. Da es sich bei unserem Achteck um ein regelmäßiges Achteck handelt, besitzt auch jede weitere Außenkante die Länge $\sqrt{2}$. Da $EFQP$ ein Rechteck ist, besitzt zusätzlich die Strecke PQ die Länge $\sqrt{2}$.
Der Umfang des Rechtecks $ABCD$ ist zweimal die Länge der Strecke AB plus zweimal die Länge der Strecke BC. Das ist genauso groß, wie

$$2(1+\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}+4.$$

Dies entspricht dem Umfang des Papierringes.

3

Wir nennen den Abstand zwischen dem Haus von Anna und Julian und dem Punkt P x. Die Zeit (in Minuten), die Anna benötigt, um das Cafe zu erreichen beträgt

$$\frac{60}{20}x+\frac{60}{10}(4-x)=3x+6(4-x)=-3x+24$$

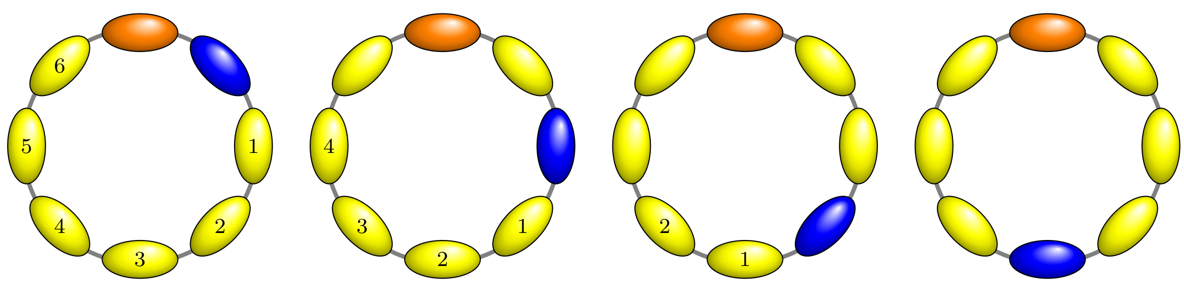
Die Zeit (in Minuten), die Julian benötigt, um das Cafe zu erreichen, beträgt

$$\frac{60}{5}x + \frac{60}{20}(4-x) = 12x + 3(4-x) = 9x + 12$$

Es muss gelten, dass $-3x + 24 = 9x + 12$, bzw. $12 = 12x$. Also ist $x = 1$ und $-3x + 24 = 21 = 9x + 12$ ist die gesuchte Antwort.

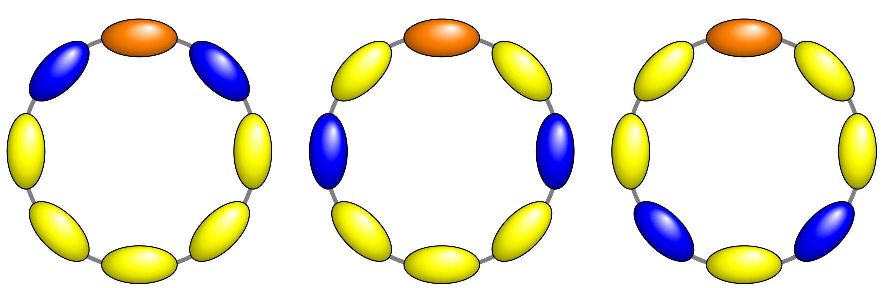
$\boxed{4}$

In dem Armband links unten können wir eine der nummerierten gelben Perlen durch eine blaue Perle ersetzen. Auf diese Weise können wir all jene Farbkombinationen mit 1 orangen, 2 blauen und 5 gelben Perlen finden, bei denen stets (mindestens) eine blaue Perle direkt neben der orangen Perle hängt.

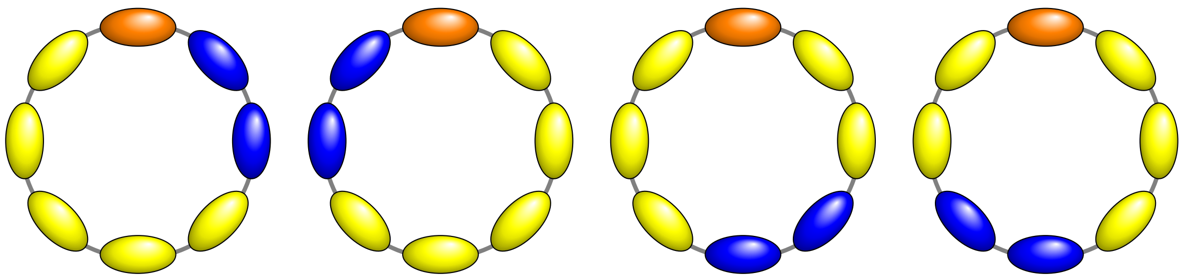


Analog können wir alle Farbkombinationen mit 1 orangen, 2 blauen und 5 gelben Perlen finden, bei denen stets eine oder mehrere gelbe Perlen zwischen der orangen Perle und der nächsten blauen Perle hängen. Die möglichen Platzierungen der zweiten blauen Perle sind in der obenstehenden Abbildung durch die nummerierten gelben Kugeln angedeutet. Die Gesamtzahl der Farbkombinationen ist daher $6 + 4 + 2 + 0 = 12$.

Im Allgemeinen gilt folgendes für die Anzahl der verschiedenen Armbänder mit genau einer orangen Perle. Wir definieren r als die Anzahl möglicher Reihenfolgen und s als die Anzahl *symmetrischer* Reihenfolgen, in denen wir die übrigen Perlen anordnen können. Die Anzahl der verschiedenen Armbänder mit genau einer orangen Perle lässt sich dann mit der Formel $\frac{1}{2}(r+s)$ berechnen. In unserem Fall ist $r = 21$ und $s = 3$ und es folgt $12 = \frac{1}{2}(21+3)$. Die 3 symmetrischen Reihenfolgen korrespondieren mit den 3 symmetrischen Armbändern, die unten abgebildet sind.



Mit nicht symmetrischen Armbändern korrespondieren stets 2 sich spiegelnde Reihenfolgen. Unter den 4 Armbändern, die hierunter abgebildet sind, finden sich nur zwei verschiedene Armbänder.



$\boxed{5}$

Wir nehmen an, dass im Puzzle von Peter die Breite b mindestens genauso groß ist, wie die Höhe h.
Im oberen und unteren Rand liegen also insgesamt $2b$ Stücke. Im linken und rechten Rand liegen insgesamt $2h$ Stücke. Die 4 Eckstücke des Puzzles liegen stets auf zwei Randseiten. Daher beträgt die Gesamtzahl der Randstücke $2b + 2h - 4$.
Da Peters Puzzle insgesamt bh Stücke besitzt, gilt

$$2b + 2h - 4 = \frac{1}{2}bh$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$0 = bh - 4b - 4h + 8$$

oder

$$(b-4)(h-4) = bh - 4b - 4h + 16 = 8$$

Da $b - 4 \geq h - 4$ und $h - 4 > -4$, folgt, dass $h - 4 = 1$ oder $h - 4 = 2$.

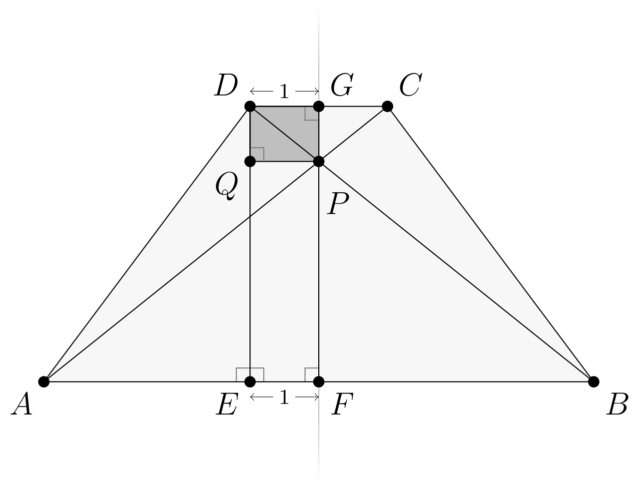
- Wenn $h - 4 = 1$, dann ist $b - 4 = 8$, also $bh = 12 \times 5 = 60$.
- Wenn $h - 4 = 2$, dann ist $b - 4 = 4$, also $bh = 8 \times 6 = 48$.

Die Anzahl der Stücke in Peters Puzzle beträgt daher 60 oder 48 und die Anzahl der Stücke in Maries Puzzle beträgt in Abhängigkeit hiervon entweder 48 oder 60. Insgesamt gibt es also $60 + 48 = 108$ Puzzlestücke.

Die Gleichung $(b-4)(h-4) = 8$ kann folgendermaßen aufgefasst werden: Wenn wir bei einem Rechteck, dass aus $b \times h$ kleinen Quadraten besteht, den Rand entfernen, so entfernen wir $2b + 2h - 4$ Quadrate und erhalten ein kleineres Rechteck mit $(b-2) \times (h-2)$ Quadraten. Wenn wir bei diesem Rechteck erneut den Rand entfernen, so entfernen wir $2(b-2) + 2(h-2) - 4 = 2b + 2h - 12$ Quadrate und erhalten ein Rechteck mit $(b-4) \times (h-4)$ Quadraten. Die Anzahl der Quadrate dieses letzten Rechtecks muss genauso groß sein, wie die Differenz an Quadrate zwischen den beiden Rändern. Also gilt

$$(b-4)(h-4) = (2b + 2h - 4) - (2b + 2h - 12) = 8$$

$\boxed{6}$



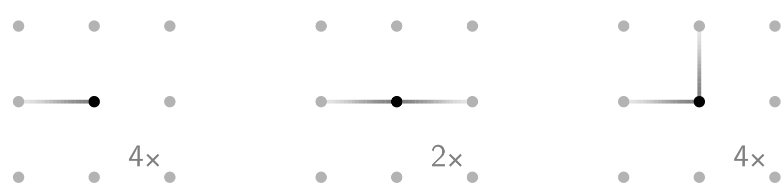
Betrachtet man in der Zeichnung DC als Grundseite und GP als Höhe im Dreieck CDP, dann ist wegen $|DC| = 2$ der Wert des Flächeninhaltes dieses Dreiecks gleich der Länge von GP (Flächeninhalt eines Dreiecks). Nun ist $|GP| = |GF| - |PF|$. Sodann $|GF| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Der Strahlensatz liefert: $\frac{|DE|}{|PF|} = \frac{|EB|}{|FB|} = \frac{5}{4}$ und somit $|PF| = \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{16}{5}$. Dann ist $|GP| = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$.

$\boxed{7}$

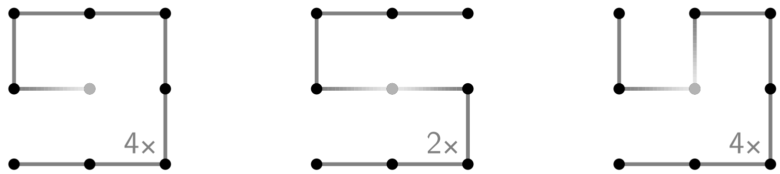
Wir nennen die beiden Zahlen d und k und wählen d so, dass d ein Vielfaches von 13 ist. Dann ist d kein Quadrat, denn die kleinste Quadratzahl, die sich gleichzeitig durch 13 teilen lässt, ist $13 \times 13 = 169$. Also muss k eine Quadratzahl sein.
Wenn die Quersumme von d gleich 7 ist, dann ist $d = 52$. Wenn die Quersumme von k gleich 7 ist, dann ist $k = 16$ oder $k = 25$. Der Rest der Division durch 9 von 16, 25 und 52 ist ebenfalls 7 (und das ist kein Zufall). Da $d + k$ durch 9 teilbar ist, sind 7 und 2 die Reste der Division durch 9 von k und d (in beliebiger Reihenfolge).
Der Rest der Division durch 9 beträgt für keine zweistellige Quadratzahl 2 (die Quersumme müsst sonst 2 oder 11 sein). (Übrigens kann der Rest bei der Division einer beliebigen Quadratzahl durch 9 nur 0, 1, 4 oder 7 sein.) Also besitzt die Teilung von d durch 9 einen Rest von 2. Hieraus folgt, dass $d = 65$. k ist dann entweder 16 oder 25. Die Antwort ist 65.

$\boxed{8}$

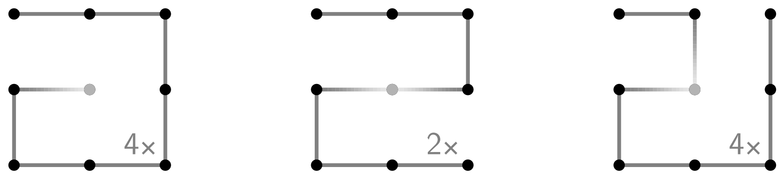
Für das Verbindungsstück am mittleren Punkt gibt es 10 unterschiedliche Lagemöglichkeiten: 4 Möglichkeiten, bei denen der Mittelpunkt ein Endpunkt des Pfades ist; 2 Möglichkeiten mit jeweils zwei gegenüberliegenden Wegstücken; 4 Möglichkeiten mit zwei Wegstücken, die im rechten Winkel aufeinander stehen.



Daraufhin können wir jeweils auf 2 Arten einen Pfad legen: Im Uhrzeigersinn



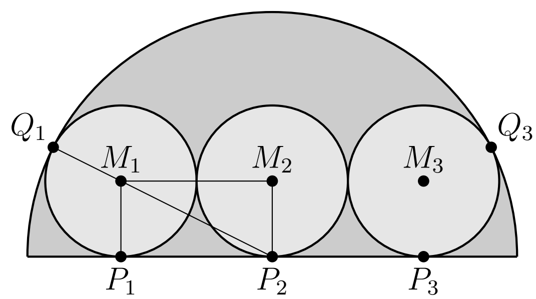
oder gegen den Uhrzeigersinn.



Also gibt es insgesamt $2 \times 10 = 20$ Pfade.

$\boxed{9}$

Wir nennen die Mittelpunkte der kleinen Kreise M_1, M_2 und M_3, und die Berührpunkte der kleinen Kreise mit der geraden Seite des Halbkreises P_1, P_2 und P_3 (siehe folgende Abbildung).



P_2 ist die Mitte der geraden Seite des Halbkreises und daher der Mittelpunkt des Kreises. Der Berührpunkt von zwei kleinen Kreisen liegt auf einer Geraden durch die Mittelpunkte der beiden Kreise. Daher liegt Q_1 auf der Geraden durch P_2 und M_1 und der Radius $|P_2Q_1|$ des großen Halbkreises ist genauso groß, wie $|P_2M_1| + |M_1Q_1|$, wobei $|\cdot\cdot|$ den Abstand zwischen zwei Punkten angibt.

Wir bemerken, dass $|M_1Q_1| = 1$. Da $P_1P_2M_2M_1$ ein Rechteck ist, können wir $|P_2M_1|$ mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen:

$$|P_2M_1| = \sqrt{|P_2M_2|^2 + |M_2M_1|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

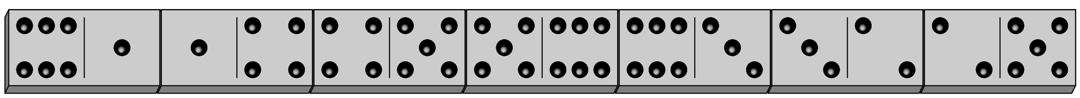
Also $|P_2Q_1| = |P_2M_1| + |M_1Q_1| = \sqrt{5} + 1$.

$\boxed{10}$

Wir legen fest, dass $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Menge der 15 Dominosteine enthält insgesamt 5 halbe Dominosteine mit n Augen. Höchstens 4 dieser halben Dominosteine können aneinander liegen. Die 5-te Hälfte kann nicht an einem weiteren Stein anliegen. Außerdem gibt es zwei halbe Dominosteine, die nicht an einem weiteren Stein anliegen. Dies sind die beiden Enden unserer Reihe.

Daher gibt es möglicherweise zwei Werte von $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, für die alle 5 halben Dominosteine mit n Augen in unserer Reihe liegen. Um das Defizit zu minimieren, wählen wir $n = 5$ und $n = 6$, sodass für alle $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Anzahl der halben Dominosteine unserer Reihe mit n Augen höchstens 4 ist. Das Defizit beträgt in diesem Fall mindestens 10.
Ein Defizit von 10 ist tatsächlich möglich. Wir entfernen die beiden folgenden Dominosteine.

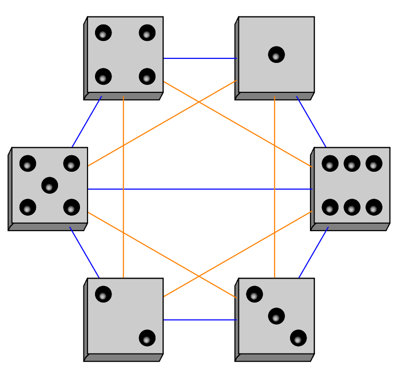
Von den übrigen 13 Dominosteinen formen die 7 Steine mit einer ungeraden Augenzahl eine verbindende Reihe.



Die 6 überigen Dominosteine mit einer geraden Augenzahl formen 2 verbindende Reihen mit jeweils 3 Dominosteinen. In beiden Reihen sind die zwei Enden gleich.

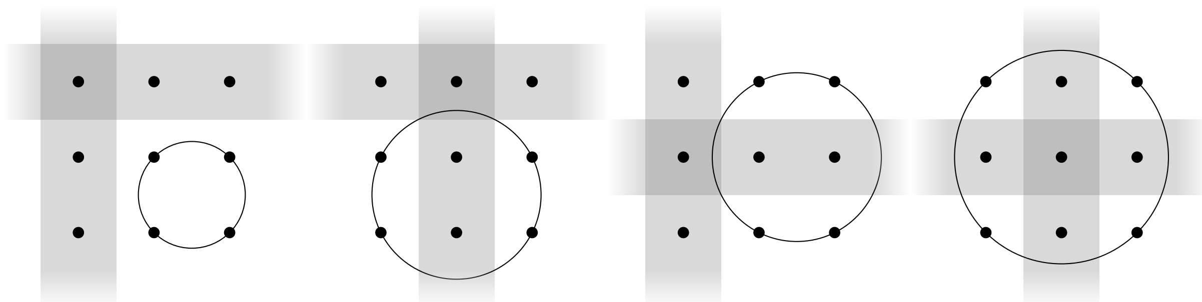
Diese beiden Reihen von jeweils 3 Dominosteinen können wir an das vordere und das hintere Ende unserer 7-er Reihe hängen.

Wir können das Problem auch auf eine andere Art und Weise auffassen. Wir denken uns die 6 möglichen halben Dominosteine als Punkte und verbinden jedes Paar von Punkten mit einer Linie. Wir lassen jedoch die Verbindungslinien der beiden Paare aus, die mit den zwei Dominosteinen übereinstimmen, die wir nicht in unserer Reihe verbauen. Wir erhalten einen sogenannten Graphen.



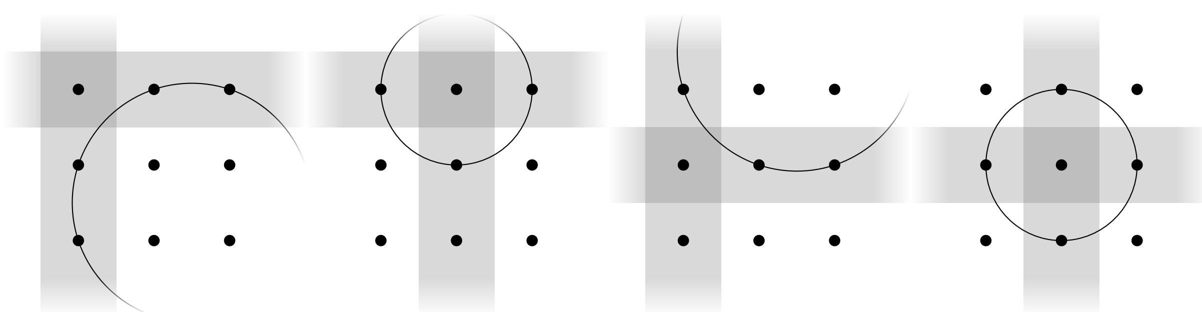
Das Auffinden einer Reihe mit dem Defizit 10 stimmt nun mit dem überein, was wir in der Graphentheorie *das Suchen nach einem Eulerkreis* nennen.

Wir können auf $3 \times 3 = 9$ Arten eine Zeile r und eine Spalte k unseres Gitters wählen. Der Schnitt der restlichen Zeilen mit den restlichen Spalten besteht dann aus vier Punkten, welche die Eckpunkte eines Rechtecks bilden. Also lässt sich durch diese vier Punkte stets ein Kreis legen.

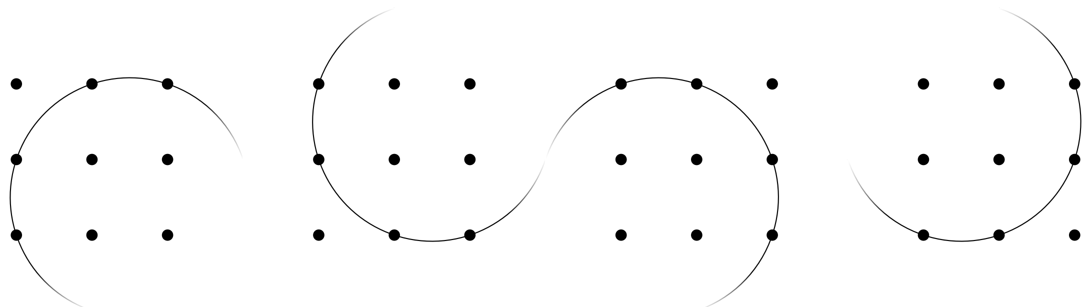


Da ein Kreis keine drei Punkte einer Geraden enthalten kann, kommt nur der Schnitt von Zeile r und Spalte k als fünfter Punkt des Kreises in Frage. Es lässt sich leicht überprüfen, dass auch dieser Punkt nicht auf dem Kreis liegen kann.
Es gibt insgesamt 9 der beschriebenen „Rechteckskreise“, welche neben den Eckpunkten des Rechtecks keine weiteren Gitterpunkte enthalten.

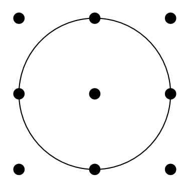
Wir nehmen nun an, dass es einen Kreis gibt, der 4 oder mehr Gitterpunkte enthält und von allen oben beschriebenen Rechteckskreisen verschieden ist. Die Anzahl der Zeilen im Gitter ist kleiner als 4. Daher gibt es eine Zeile r im Gitter, in der sich zwei Punkte befinden, die im Kreis enthalten sind. Da ein Kreis keine drei Punkte einer Geraden enthält, liegt der dritte Punkt der Zeile r nicht auf dem Kreis. Diesen dritten Punkt betrachten wir nun als den Schnitt von Zeile r mit Spalte k des Gitters.



Da unser Kreis verschieden von den beschriebenen Rechteckskreisen sein soll, gibt es nur noch zwei Punkte die als dritter und vierter Punkt des Kreises in Frage kommen. Dies sind die Punkte aus Spalte k, die nicht in Zeile r liegen. Einen fünften Punkt gibt es nicht.
Wenn die beiden Kreispunkte aus Zeile r nebeneinander liegen, erhalten wir folgende 4 Möglichkeiten.



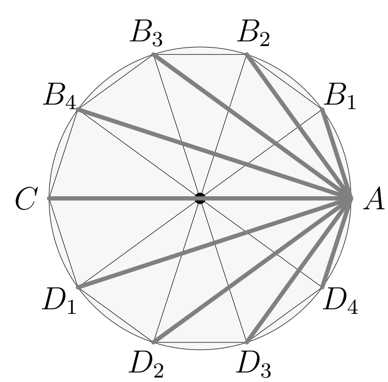
Wenn die Kreispunkte aus Zeile r nicht nebeneinander liegen, so erhalten wir folgenden Kreis.



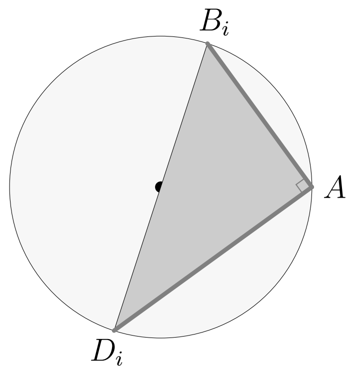
Die Anzahl der Kreise beträgt daher $9 + 4 + 1 = 14$.

$\boxed{12}$

Wir bezeichnen den gewählten Eckpunkt mit A und nennen die darauf folgenden Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn B_1, B_2, B_3, B_4, C, D_1, D_2, D_3 und D_4.



Die Strecke AC verläuft durch den Mittelpunkt des Kreises und besitzt daher die Länge 2. Ebenso verlaufen die Strecken B_iD_i für jedes i durch den Mittelpunkt des Kreises. Daher besitzt auch B_iD_i eine Länge von 2. Außerdem handelt es sich bei dem Winkel D_iAB_i für jedes i um einen rechten Winkel.



Wir bezeichnen mit $|\cdot\cdot|$ den Abstand zwischen zwei Punkten. Da der Winkel D_iAB_i für jedes i 90 Grad beträgt, gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}|AB_i|^2+|AC|+\sum_{i=1}^{4}|AD_i|^2 &= |AC|^2+\sum_{i=1}^{4}\left(|D_iA|^2+|AB_i|^2\right)\\ &= |AC|^2+\sum_{i=1}^{4}|D_iB_i|^2\\ &= 2^2+4\cdot 2^2\end{aligned}$$

Die gesuchte Antwort ist 20.

$\boxed{13}$

Wir betrachten zunächst die 6 Schritte für die letzten 2 Ziffern.

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{0} \rightsquigarrow \boxed{}\boxed{}\boxed{1}\boxed{5}$$

Die Abfolge dieser 6 Schritte (unabhängig von den beiden übrigen Schritten) kann auf 5 Arten gewählt werden. Die dritte Ziffer wird jeweils direkt nach einer Erhöhung der vierten Ziffer erhöht, was genau 5 mal geschieht.

Zu dieser Abfolge von 6 Schritten können wir das erste Erhöhen der ersten Ziffer hinzufügen. Wir erhalten eine Abfolge von 7 Schritten.

$$\boxed{0}\boxed{}\boxed{0}\boxed{0} \rightsquigarrow \boxed{1}\boxed{}\boxed{1}\boxed{5}$$

Das Hinzufügen dieses 7-ten Schrittes kann auf 7 unterschiedliche Arten durchgeführt werden. Wir nehmen nun an, dass die Erhöhung der ersten Ziffer im p-ten von 7 Schritten geschieht. Dann kann p einen Wert in $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ annehmen.

Zu der Abfolge von 7 Schritten können wir das zweite Erhöhen der ersten Ziffer hinzufügen. Wir erhalten eine Abfolge von 8 Schritten.

$$\boxed{0}\boxed{}\boxed{0}\boxed{0} \rightsquigarrow \boxed{2}\boxed{}\boxed{1}\boxed{5}$$

Das Hinzufügen des 8-ten Schrittes kann auf $8-p$ unterschiedliche Arten durchgeführt werden. Die Wertemenge von $8-p$ ist $\{7,6,5,4,3,2,1\}$. Also sind

$$(7+6+5+4+3+2+1)\times 5 = 28\times 5 = 140$$

Reihenfolgen für die 8 Schritte möglich. Die zweite Ziffer bleibt 0 und die Antwort lautet 140.

$\boxed{14}$

Wir nennen die vier Zahlen a, b, c und d, und zwar so, dass $a \leq b \leq c \leq d$. Da alle sechs Ergebnisse unterschiedlich sind, gilt $a < b < c < d$. Zudem gilt folgendes:

$$a + b = 8 \qquad a + c = 10 \qquad b + d = 20 \qquad c + d = 22$$

Also

$$2a + b + c = 18 \qquad \text{und} \qquad b + c + 2d = 42$$

Es folgt $2(d - a) = 42 - 18 = 24$. Also ist $d - a = 12$ die Antwort.

Wir sehen außerdem, dass

$$b + c = 18 - 2a \qquad \text{und} \qquad a + d = 12 + 2a$$

Da $a + d$ entweder 14 oder 16 sein muss, ist $a = 1$ oder $a = 2$. Beides ist möglich und die Summe $b + c$ ist entweder 16 oder 14.
Also hat Thomas entweder die Zahlen 1, 7, 9 und 13 oder die Zahlen 2, 6, 8 und 14 ausgewählt.

$\boxed{15}$

Wir wählen ein Koordinatensystem mit Einheiten von 1 km, Ursprung A, x-Achse AB und y-Achse AD. Dann ist $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (5, 5)$ und $D = (0, 5)$.
Boot Nummer 1 fährt von Punkt $(0, 0)$ nach Punkt $(5, 5)$. Boot Nummer 2 fährt von Punkt $(5, 5)$ nach Punkt $(0, 5)$. In dem Moment, in dem sich Boot 1 am Punkt (x, x) befindet, ist Boot 2 am Punkt $(5 - x, 5)$. Der Abstand zwischen den beiden Booten beträgt dann

$$\sqrt{\big(x - (5 - x)\big)^2 + (x - 5)^2}$$

also müssen wir $\big(x - (5 - x)\big)^2 + (x - 5)^2$ minimieren.
$\big(x - (5 - x)\big)^2 + (x - 5)^2$ lässt sich umformen zu

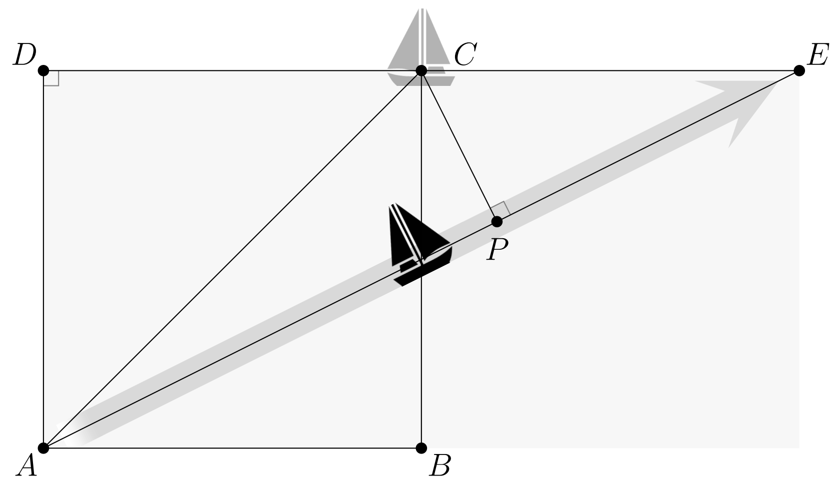
$$(2x - 5)^2 + (x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25 + x^2 - 10x + 25 = 5x^2 - 30x + 50$$

Durch quadratische Ergänzung finden wir

$$5x^2 - 30x + 25 = 5(x^2 - 6x + 10) = 5(x^2 - 6x + 9 + 1) = 5\big((x - 3)^2 + 1\big) \geq 5$$

Es lässt sich nun erkennen, dass der minimale Abstand zwischen den beiden Booten für $x = 3$ erreicht wird. In diesem Fall erhalten wir mit unserer Formel das Ergebnis 5. Die Antwort beträgt dann $\sqrt{5}$.

Ein weiterer Lösungsweg funktioniert folgendermaßen. Gleichzeitig zu den Fahrten der beiden Boote bewegen wir das Meer (mit den beiden Booten darauf) mit konstanter Geschwindigkeit. Wir wählen die Geschwindigkeit so, dass sich das Boot, welches ursprünglich von C nach D fuhr, nicht mehr bewegt.



Boot 2 bleibt auf $(5,5) = (5-x,5)+(x,0)$. Daher beschreibt $(x,0)$ den Vektor der Verlagerung des Meeres zu dem Zeitpunkt, an dem Boot 2 ursprünglich Position $(5-x,5)$ erreicht hätte. Boot 1 befindet sich auf Position $(x,x)+(x,0) = (2x,x)$ anstelle von Position (x,x) und fährt daher von $A = (0,0)$ nach $E = (10,5)$.
Boot 1 besitzt dann den kürzesten Abstand zu C, wenn es sich auf Position P befindet. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke AED und CEP kann man folgern, dass der Abstand zwischen C und P $\sqrt{5}$ Kilometer beträgt.

$\boxed{16}$

Wir bemerken, dass $9 \cdot a = (10 \cdot a - 1) - (a - 1)$ und definieren $\tilde{c}_9 = c_9 - 1$. Dann ist $c_8 \leq \tilde{c}_9 < 9$. Es gilt

$$a - 1 = c_1c_2c_3 \cdots c_9 - 1 = c_1c_2 \cdots c_8\tilde{c}_9$$

und

$$10 \cdot a - 1 = c_1c_2c_3 \cdots c_90 - 1 = c_1c_2 \cdots c_8\tilde{c}_99$$

Da $\tilde{c}_9 < 9$, muss die letzte Ziffer von $a-1$ kleiner als die letzte Ziffer von $10 \cdot a - 1$ sein. Da $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_8 \leq \tilde{c}_9$, ist die Ziffer, welche an i-ter Stelle vor der letzten Ziffer von $a-1$ steht, kleiner als die Ziffer, welche an i-ter Stelle vor der letzten Ziffer von $10 \cdot a - 1$ steht. Dies gilt für alle i, für die die entsprechende Ziffer in $a - 1$ existiert.
Hieraus folgt, dass die Summe der Ziffern von $9 \cdot a = (10 \cdot a - 1) - (a - 1)$ genauso groß sein muss, wie die Summe der Ziffern von $10 \cdot a - 1$ minus die Summe der Ziffern von $a - 1$. Die Antwort lautet also

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_8 + \tilde{c}_9 + 9) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_8 + \tilde{c}_9) = 9$$

Wegen $111111112 \cdot 9 = 1000000008$ gibt es auch eine Zahl mit dieser Quersumme.

Weitere Lösung:
Die kleinste und die größte derartiger Zahlen haben die Quersumme 9: $111111112 \cdot 9 = 1000000008$, $188888889 \cdot 9 = 1700000001$.
Aber auch alle Zahlen dazwischen haben die Quersumme 9. Erhöht man unter Beachtung

der gegebenen Bedingungen eine Ziffer um 1 an der k-ten Stelle, so bedeutet die Multiplikation mit 9 der neuen Zahl die Addition von $9 \cdot 10^{(}9-k)$ zur alten Zahl. Aufgrund des hierbei auftretenden Übertrags erniedrigt sich jetzt die k-te Stelle um 1, andererseits erhöht sich die $(k-1)$-Stelle um 1, d.h. die Quersumme bleibt gleich.

$\boxed{17}$

Wir legen fest, dass a die erste und b die letzte Ziffer von einer der gesuchten Zahlen ist. Dann ist $100 \cdot a + b$ eine der Zahlen, die wir suchen, und $10 \cdot a + b$ ein Teiler hiervon. Wir nennen den Quotienten der beiden Zahlen c. Es gilt

$$\frac{100 \cdot a + b}{10 \cdot a + b} = c$$

Dann ist c eine positive ganze Zahl, $c < 10$ und

$$100 \cdot a + b = c(10 \cdot a + b)$$

Hieraus folgt, dass

$$100 \cdot a + b = c \cdot 10 \cdot a + c \cdot b$$

und

$$(10-c) \cdot 10 \cdot a = (c-1) \cdot b \tag{*}$$

Da $a \geq 1$, ist

$$(10-c) \cdot 10 \leq (c-1) \cdot b < (c-1) \cdot 10$$

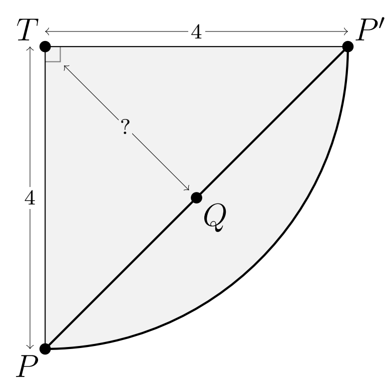
also $10 - c < c - 1$ und $11 < 2c$. Da $c < 10$, ist c eine der Zahlen 6, 7, 8 und 9.

- Angenommen $c = 6$. Dann folgt aus (*), dass $4 \cdot 10 \cdot a = 5 \cdot b$, also $a = 1$ und $b = 8$.
- Angenommen $c = 7$. Dann folgt aus (*) dass $3 \cdot 10 \cdot a = 6 \cdot b$, also $a = 1$ und $b = 5$.
- Angenommen $c = 8$. Dann folgt aus (*) dass $2 \cdot 10 \cdot a = 7 \cdot b$, aber das ist nicht möglich.
- Angenommen $c = 9$. Dann folgt aus (*) dass $1 \cdot 10 \cdot a = 8 \cdot b$, also $a = 4$ und $b = 5$.

Die Antwort lautet also $108 + 105 + 405 = 618$.

$\boxed{18}$

Wir zerschneiden den Mantel des Kegels entlang der Geraden zwischen P und T. Wenn wir den Mantel nun auffalten, erhalten wir den Teil eines Kreises, ein sogenanntes *Kuchenstück*. Da unser Schnitt durch den Punkt P verläuft, besitzt unser Kuchenstück nun zwei Punkte P. Zur Unterscheidung nennen wir einen dieser Punkte P'.



Der Kreisbogen von P nach P' gehört zu einem Kreis mit dem Radius 4 und die Länge des Bogenstücks ist genauso groß, wie der Umfang der Grundseite des Kegels mit Radius 1. Dies ist ein Viertel des Umfangs eines Kreises mit Radius 4. Also muss unser Kuchenstück ein Viertel von einem Kreis mit Radius 4 sein.
Das Gummiband spannt nun eine Gerade von P nach P'. Da das Gummiband auch vor dem Auffalten des Kegels so kurz wie möglich war, befand es sich auf der selben Position. Dies gilt auch für den Punkt Q, der nun genau zwischen P und P' liegt. Es ist $|TQ| = |PQ| = \frac{1}{2}\sqrt{PP`} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2} = 2 \cdot \sqrt{2}$. Dies war auch vor dem Auffalten des Kegelmantels so.

$\boxed{19}$

Wir definieren $c = b - a$. Dann ist $c \geq 1$ und

$$2015 = b^3 - a^3 = (a+c)^3 - a^3 = 3a^2c + 3ac^2 + c^3 = (3a^2 + 3ac + c^2)c$$

Wir schreiben c in der Form $c = 3 \cdot q + r$, wobei q der Quotient und r der Rest der Division von c und 3 ist. Wenn man 2015 durch 3 teilt, erhält man einen Rest von 2. Daher muss auch beim Teilen von $(3a^2+3ac+c^2)c$ durch 3 ein Rest von 2 übrig bleiben. Dies gilt genau dann, wenn $r = 2$.
Wenn $c \geq 15$, dann ist

$$2015 = (3a^2 + 3ac + c^2)c \geq c^3 \geq 225 \cdot 15 > 200 \cdot 15 = 3000,$$

was einen Widerspruch liefert. Also ist $c \leq 14$. Außerdem muss c ungerade sein, da auch 2015 ungerade ist. Wenn wir dies mit der Bedingung $r = 2$ kombinieren, erhalten wir $c = 5$ oder $c = 11$.
5 ist ein Teiler von 2015 und $2015 = 5 \cdot 403$. Es gilt $4 \cdot 9 \cdot 11 = 4 \cdot (100 - 1) = 400 - 4$. Hieran sehen wir, dass beim Teilen von 403 durch 11 ein Rest von 7 entsteht. Also ist 11 kein Teiler von 2015 und $c \neq 11$. Es gilt daher $c = 5$.
Wir müssen also eine positive ganze Zahl a finden, mit

$$3a^2 + 15a + 25 = 403$$

oder $3a(a+5) = 403 - 25 = 378$. Also $a(a+5) = 126$. Wenn $a \geq 10$, dann ist $a(a+5) \geq 10 \cdot 15 = 150$, was einen Widerspruch darstellt. Also $a \leq 9$. Außerdem ist 126 teilbar durch 9. Es folgt $a = 4$ oder $a = 9$. Wir sehen, dass $4(4+5) = 36 < 126$. Also gilt $a = 9$.
Tatsächlich gilt $9(9+5) = 126$. Also ist $a = 9$ und $b = a + c = 9 + 5 = 14$. Die Antwort lautet $a + b = 9 + 14 = 23$.

Weitere Lösung:
Wegen $2015 = (3a^2+3ac+c^2) \cdot c$ ist c ein Teiler von $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. c kann also höchstens die Werte 1, 5 oder 13 annehmen, die größeren kommen - wie man sich leicht überlegen kann - nicht in Betracht. Die obige Gleichung kann umgeformt werden zu $a^2 + ac + \frac{c^2}{3} - \frac{403}{c} = 0$. Nur $c = 5$ liefert (pq-Formel) für a die ganzzahligen Lösungen $a = 9$ und $a = -14$. Mit $a = 9$ ist $b = a + c = 9 + 5 = 14$ und somit $a + b = 9 + 14 = 23$.

$\boxed{20}$

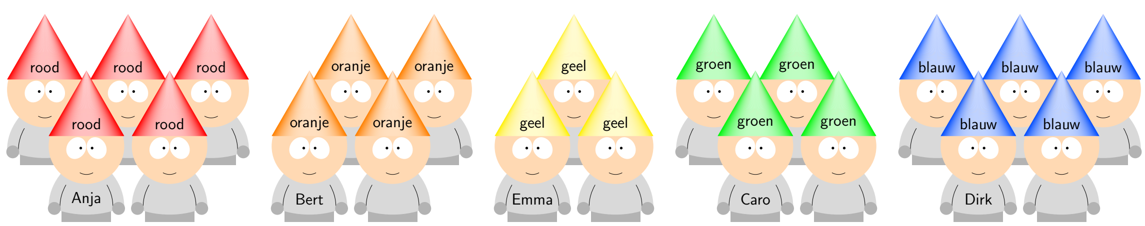
Wir bezeichnen die Gruppe der 5 SchülerInnen Anja, Bert, Caro, Dirk und Emma mit G. Außerdem nennen wir die Anzahl der Hüte in der Farbe, die am meisten vorkommt m. Für jede Farbe gibt es zwei SchülerInnen aus G, die die Farbe genauso oft sehen, wie eine andere Farbe. Wenn es nur eine Farbe k gibt, die auf m Hüten auftritt, so können nur SchülerInnen mit einem Hut in Farbe k die Farbe k bei den anderen SchülerInnen so oft sehen, wie eine andere Farbe. Da nur eine Schülerin bzw. ein Schüler aus G die Farbe k auf dem Hut hat, entsteht hier ein Widerspruch.

Es muss also zwei Farben geben, die jeweils auf m Hüten auftreten. Alle anderen Farben treten auf höchstens m Hüten auf. Für jedes Paar von Farben für das gilt, dass eine Schülerin bzw. ein Schüler genauso viele Hüte in der einen wie in der anderen Farbe sieht, kann die Differenz zwischen den jeweiligen Gesamtzahlen der Hüte höchstens 1 sein. Die Gesamtzahl aller Hüte beträgt daher mindestens $2m + 2(m-1) + (m-2) = 5m - 4$ (und höchstens $5m$).

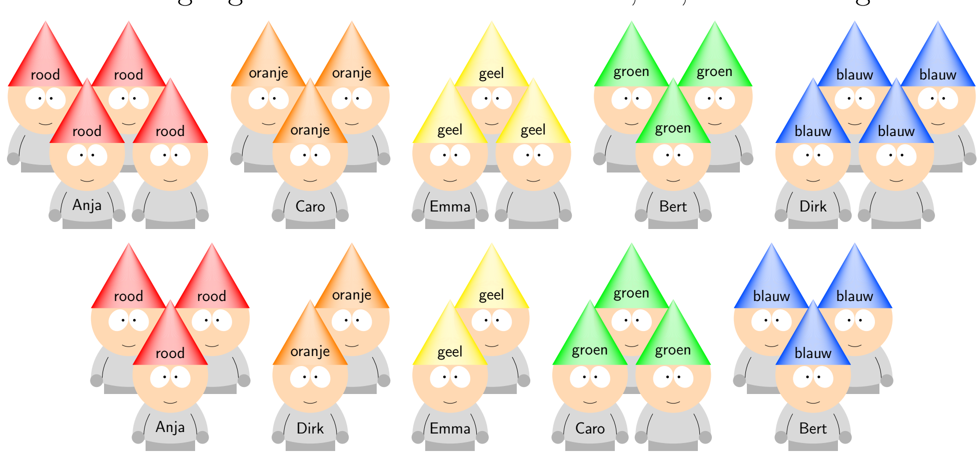
Emma sieht also mindestens $5m - 5$ Hüte. Wenn Emma höchstens $m - 1$ blaue Hüte sieht, sieht sie auch höchstens $m - 1$ rote Hüte. Insgesamt sieht Emma also höchstens $2m - 2$ rote und blaue Hüte. Es gilt jedoch $2m - 2 < \frac{1}{2}(5m - 5)$. Dies ist ein Widerspruch. Emma sieht m blaue und daher auch m rote Hüte.

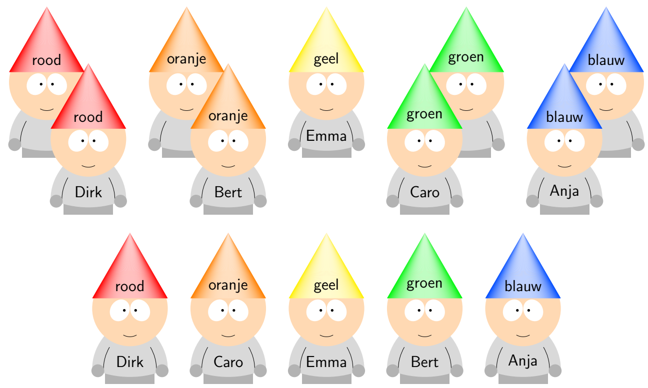
Emma sieht also insgesamt $4m$ Hüte und es gibt $4m+1$ Schülerinnen in der Klasse. Weiter oben haben wir bereits gesehen, dass mindestens $5m - 4$ Schülerinnen in der Klasse sein müssen. Also gilt $5m - 4 \leq 4m + 1$, bzw. $m \leq 5$. Die Anzahl der Schülerinnen hat also die Form $4m + 1$ und beträgt höchstens $4 \times 5 + 1 = 21$. Da die Anzahl der Schülerinnen nicht 1, 5, 9, 13 oder 17 sein kann, muss 21 die richtige Antwort sein.

Die Verteilung der 21 Hüte sieht wie folgt aus.



Ohne die letzte Bedingung sind auch die Antworten 17, 13, 9 und 5 möglich.




rood
rood
Dirk
oranje
oranje
Bert
geel
Emma
groen
groen
Caro
blauw
blauw
Anja
rood
Dirk
oranje
Caro
geel
Emma
groen
Bert
blauw
Anja