hausdorff
CENTER FOR MATHEMATICS

Bonner Mathematikturnier 2020

Staffel-Aufgaben

Aufgabe 1 (20 Punkte)

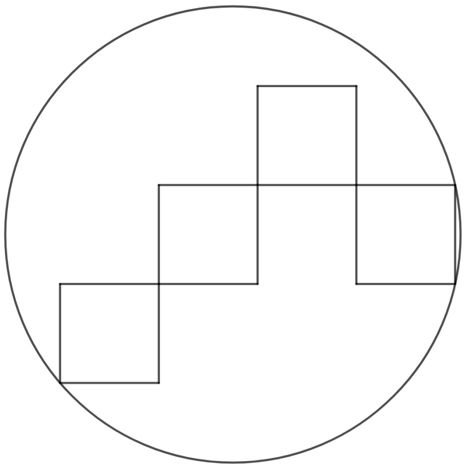
2 Versuche

Zu jeder vollen Minute machen wir ein Foto der Anzeige einer Digitaluhr. Auf dem Foto von 22:12 Uhr sehen wir einmal die Ziffer 1 und dreimal die Ziffer 2. Man kann auf jedem Foto zählen, wie oft die Ziffer 1 und wie oft die Ziffer 2 vorkommt. Wie viel häufiger kommt während einer Zeitspanne von 24 Stunden die Ziffer 1 auf den Fotos vor als die Ziffer 2?

Aufgabe **2** (30 Punkte)

3 Versuche

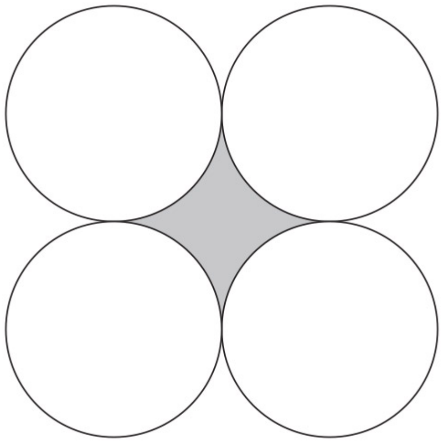
Vier Quadrate mit untereinander gleichen Seitenlängen liegen wie in der folgenden Abbildung in einer kreisförmigen Scheibe. Das am weitesten links gelegene Quadrat hat genau einen Punkt mit dem Rand der Kreisscheibe gemeinsam, und das am weitestens rechts gelegene genau zwei Punkte. Weiter berühren zwei Quadrate einander höchstens in einem Eckpunkt. Wie groß ist das Flächenmaß der Kreisscheibe, wenn jedes Quadrat das Flächenmaß 1 besitzt?



Aufgabe 3 (20 Punkte)

2 Versuche

Betrachte die vier Kreise in der Abbildung. Jeder Kreis hat den Radius 1 und berührt beide anliegenden Kreise. Wie groß ist die Fläche des grau markierten Gebietes?



Aufgabe 4 (30 Punkte)

3 Versuche

Eine *autobiographische* Zahl ist eine Zahl, bei der die erste Ziffer angibt, wie viele Nullen in der Zahl vorkommen, die zweite Ziffer, wie viele Einsen in ihr vorkommen, die dritte Ziffer, wie viele Zweien in ihr vorkommen usw.. Die Zahl 2020 ist eine autobiographische Zahl: in ihr kommen 2 Nullen vor, 0 (also keine) Einsen, aber 2 Zweien und wieder keine Dreien. Wie lautet die nächstgrößere autobiographische Zahl nach 2020?

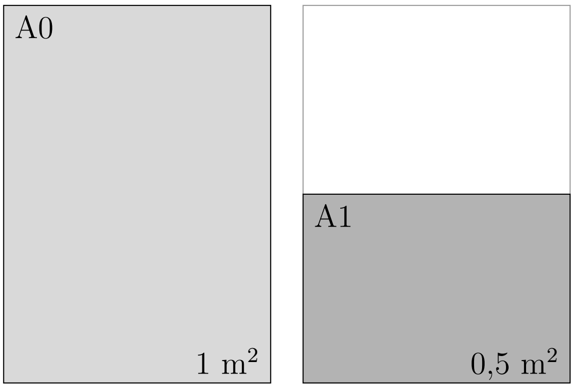
Aufgabe 5 (20 Punkte)

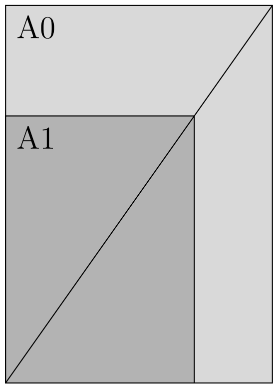
3 Versuche

Ein Bogen Papier der Größe A0 ist rechteckig und hat eine Oberfläche von 1m^2. Wenn man in in der Mitte der langen Seite zusammenfaltet, dann sieht man einen Bogen der Größe A1 (siehe linke Skizze).

Wenn man nun den A1-Bogen so auf den A0-Bogen legt, dass eine lange Seite des A1-Bogens auf einer langen Seite des A0-Bogens und eine kurze Seite des A1-Bogens auf einer kurzen Seite des A0-Bogens liegt, dann liegt die Diagonale des A1-Bogens auf der Diagonalen des A0-Bogens (siehe rechte Abbildung).

Genauso kann man einen A1-Bogen zu einem A2-Bogen halbieren, dann einen A2-Bogen zu einem A3-Blatt, dann dieses wieder zu einem A4-Blatt.





Wie lang ist die die längere Seite des A4-Blattes in Zentimetern?

Aufgabe **6** (30 Punkte)

3 Versuche

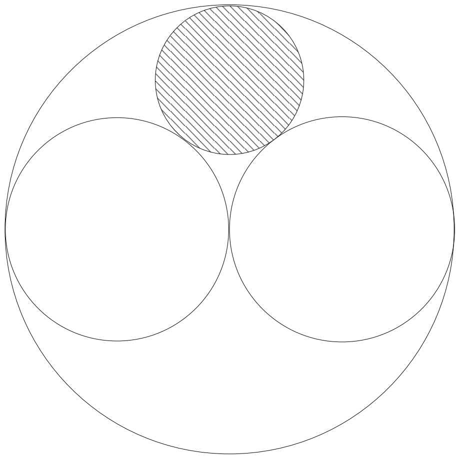
Du spielst gegen einen Computer - nennen wir ihn Miraculix. Dieser „denkt“ sich eine Zahl, die du erraten musst. Genauer: Miraculix kennt nur die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Er denkt sich erst mal eine von denen - und du rätst. Wenn du richtig rätst, gewinnst du. Sonst aber denkt sich Miraculix eine Zahl, die sich um 1 von seiner vorigen gedachten Zahl unterscheidet. Du rätst wieder $\cdots$ und das geht so weiter bis zu entweder die Zahl von Miraculix erraten hast oder eben vier mal falsch geraten hast – und im letzeren Fall hat Miraculix gewonnen.

Du weißt natürlich nicht, was Miraculix sich so denkt (während Miraculix ja immer erfährt, was du geraten hast). Du hast also keine Lust, während des Spiels deinen Plan anzupassen. Du könntest zum Beispiel den folgenden Plan durchhalten: rate 1, dann (falls notwendig) 3, dann 2 und wieder die 3. In Kurzschrift würden wir diesen Plan als 1-3-2-3 notieren. Vielleicht hast du Glück und gewinnst mit diesem Plan; es könnte aber auch sein, dass Miraculix sich die Zahlen 3-2-1-2 wählt, und dann hättest du verloren.

Gib - in Kurzschrift - einen Plan an, mit dem du sicher gewinnst – ganz egal, was Miraculix sich so denkt.

Aufgabe 7 (20 Punkte)

2 Versuche



Der Radius des großen Kreises beträgt 2; die größeren inneren Kreise haben beide den Radius 1. Alle vier Kreise berühren einander. Wie groß ist der Radius des schraffierten Kreises?

Aufgabe 8 (30 Punkte)

3 Versuche

Vor uns liegen drei vierseitige Spielsteine, auf deren Flächen jeweils eine Buchstabe aufgemalt ist. Kein Buchstabe kommt auf mehreren Spielsteinen vor, und jeder Buchstabe kommt auf einem Spielstein immer nur höchstens einmal vor. In jeder Runde werfen wir alle drei Spielsteine zugleich: jedesmal erhalten wir drei verschiedene Buchstaben, die wir (in irgendeiner Reihenfolge) notieren. Nach acht solcher Runden haben wir die folgenden Drei-Buchstaben-Worte notiert:

KAT, ZON, MOP, UIL, PUS, TAP, MIN, PAS

Welche Buchstaben stehen jeweils auf jedem der drei Spielsteine?

Gib die Antwort in drei Gruppen an (für jeden Spielstein eine) und sortiere die Buchstaben jeweils alphabetisch.

Aufgabe 9 (20 Punkte)

2 Versuche

Es sei n die kleinste natürliche Zahl über 200, die als Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden kann, aber auch als Summe von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen und auch noch als Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Bestimme n !

Aufgabe 10 (30 Punkte)

3 Versuche

Fünf Piraten, die alle unterschiedlich alt sind, haben einen Schatz von 100 Goldstücken erbeutet. Zurück auf ihrem Schiff beschließen sie, die Beute wie folgt zu verteilen: Der älteste Pirat unterbreitet einen Vorschlag, wie der Schatz aufgeteilt werden soll, und alle Piraten (also einschließlich des Ältesten) stimmen dafür oder dagegen. Wenn mindestens die Hälfte der Piraten dem Vorschlag zustimmen, werden die Goldstücke dem Vorschlag entsprechend verteilt – aber andernfalls wird der Pirat, der den Vorschlag gemacht hat, über Bord geworfen und das Verfahren wird mit den übriggebliebenen Piraten wiederholt. Wenn ein Pirat gleich viele Münzen bekommen würde, egal, ob für oder gegen einen Vorschlag stimmt, dann gewinnt aus Frustration sein Blutdurst die Oberhand: der Pirat, der den Vorschlag gemacht hat, endet als Haifutter. Wir gehen davon aus, dass alle Piraten rational handeln, goldgierig und gut in Mathematik sind aber nur höchst ungern sterben wollen. Wie viele Goldstücke wird der erste Pirat bekommen?

Aufgabe **11** (20 Punkte)

3 Versuche

Welche Aussagen sind wahr?

Gebt eure Antwort in Form einer Buchstabenreihe, also zum Beispiel (A)-(D)-(E) an.

(A) Alle weiter unter stehenden Aussagen sind wahr.

(B) Keine von den weiter unten stehenden Aussagen ist wahr.

(C) Alle weiter oben stehenden Aussagen sind wahr.

(D) Genau eine der weiter oben stehenden Aussagen ist wahr.

(E) Keine der weiter oben stehenden Aussagen ist wahr.

(F) Keine der weiter oben stehenden Aussagen ist wahr.

Aufgabe **12** (30 Punkte)

3 Versuche

Bestimme alle natürlichen Zahlen $n > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\dfrac{9n^2 + 16n - 4}{2n - 1}$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 13 (20 Punkte)

3 Versuche

Luis ersteigt einen Berg von 2000 m Höhe; der Berg hat die Form eines senkrechten Kreiskegels. Er entscheidet sich für einen Weg, der sich vom Fuß des Berges aus mit einem konstanten Anstiegswinkel von 10° nach oben windet; von oben gesehen wandert er im Uhrzeigersinn um den Berg.

Luis folgt seinem Weg, und in dem Augenblick, in dem er sich zum ersten Mal an der dem Startpunkt gegenüberliegenden Seite des Gipfels befindet, hat er seit dem Start genau 400 Höhenmeter erstiegen.

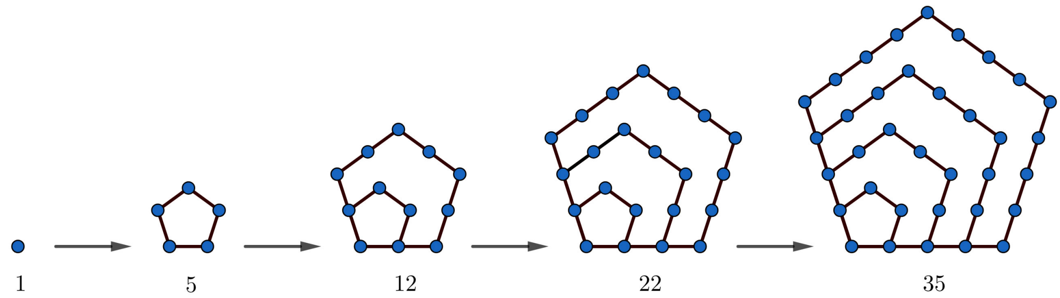
Wie viele Höhenmeter wird er zu dem Zeitpunkt erklommen haben, wenn er sich zum ersten Mal wieder über seinem Startpunkt befindet?

Aufgabe **14** (30 Punkte)

2 Versuche

Wir betrachten ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge 1, wobei wir auf jede Ecke einen dickeren Punkt gezeichnet haben. Dieses Fünfeck legen wir in ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge 2, und wir bringen in den Ecken und auf den Seiten wieder Punkte im Abstand 1 an. Diese Figur wird in ein Fünfeck der Seitenlänge 3 eingebettet – und wieder bringen wir Punkte im Abstand 1 an. Vor das allererste Fünfeck legen wir einen einzelnen dicken Punkt (siehe Skizze), von dem ab wir die Schritte nummerieren.

Zum Beispiel finden wir im fünften Schritt (in dem auf der längsten Seite 5 Punkte sind) insgesamt 35 Punkte.



Wie viele Punkte findet man im 2020. Schritt?

Aufgabe 15 (20 Punkte)

3 Versuche

Wir betrachten Zahlen, die nur aus zwei Ziffern bestehen (wobei die erste nicht 0 ist). Fünf Eigenschaften könnte eine solche Zahl besitzen:

(i) Die Zahl ist 50.

(ii) Die Zahl ist 52.

(iii) Die Zahl ist gerade.

(iv) Die Zahl ist die Summe der Quadrate verschiedener Primzahlen.

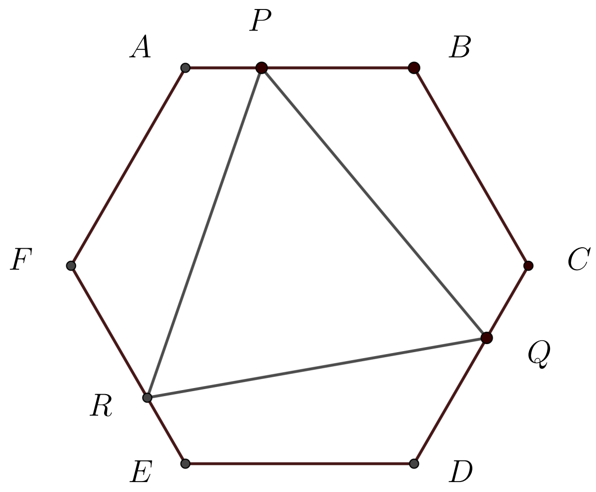
(v) Die Zahl ist ein um 2 vermindertes Vielfaches von 9.

Natürlich gibt es keine Zahlen, die alle diese Eigenschaften besitzen. Welches ist die kleinste Zahl, die so viele dieser Eigenschaften wie möglich besitzt?

Aufgabe **16** (30 Punkte)

3 Versuche

Gegeben sind ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ wie in der folgenden Zeichnung, ein Punkt P auf der Seite AB, ein Punkt Q auf der Seite CD und ein Punkt R auf der Seite EF, sodass $2|AP| = |PB| = |QD| = |RF|$ ist.



Berechne das Verhältnis der Fläche des Dreiecks PQR zur Fläche des Sechsecks $ABCDEF$.

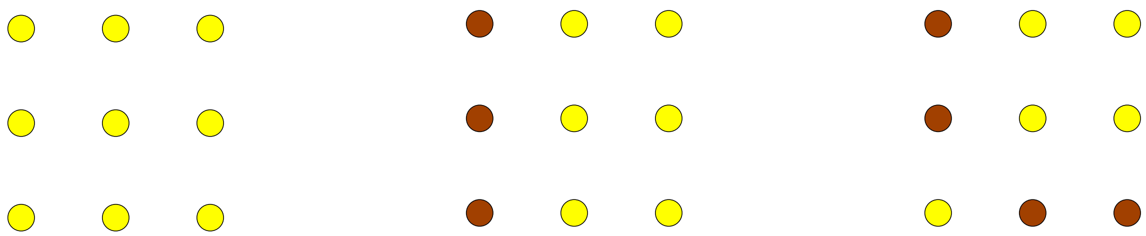
Aufgabe **17** (20 Punkte)

2 Versuche

Es seien p und A ganze Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq A \leq 10\,000$. Wie viele Kombinationen gibt es, sodass $p\%$ von A gleich 2020 ist?

Aufgabe **18** (20 Punkte)

3 Versuche

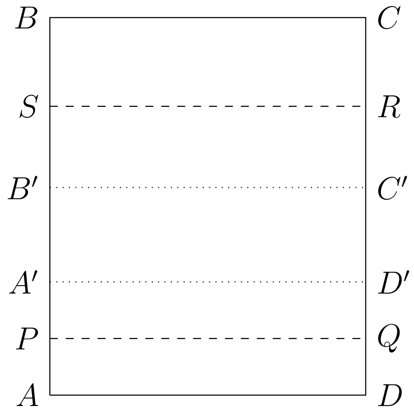


Vor euch liegen neun Münzen in einer quadratischen Anordnung; alle zeigen mit der Kopf-Seite nach oben. Man darf beliebig oft alle Münzen in einer Zeile oder in einer Spalte umdrehen. Wie viele verschiedene Muster können so hergestellt werden?

Aufgabe 19 (30 Punkte)

2 Versuche

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit zwei Faltlinien PQ und RS. Wenn wir entlang dieser Linien falten, erhalten wir das Rechteck $PQRS$, das dem gegebenen Rechteck $ABCD$ ähnlich ist und 64% der Fläche von $ABCD$ besitzt.



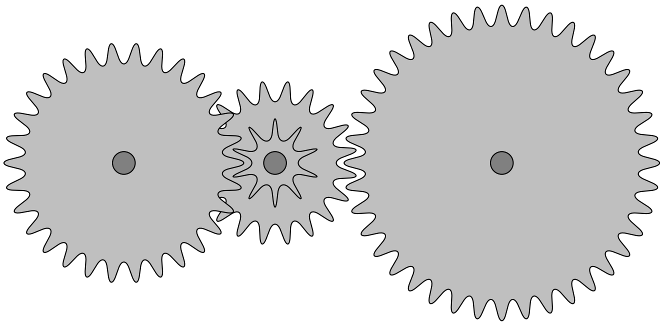
Die Abbildung zeigt nicht die richtigen Längenverhältnisse.

Bestime das Verhältnis $\dfrac{|AB|}{|BC|}$!

Aufgabe **20** (30 Punkte)

3 Versuche

Mit 4 Zahnrädern mit – der Größe nach geordnet – 10, 20, 30 und 40 Zähnen kann man ein Getriebe mit dem Übersetzungsverhältnis $\frac{3}{2}$ bauen. Man bringt die vier Zahnräder auf drei Achsen an und konstruiert so zwei Zahnradübergänge, wie es in der folgenden Zeichnung gezeigt ist; dabei steht ● für eine Achse. Dann dreht die am weitesten rechts gelegene Achse genau $\frac{3}{2}$ mal so schnell wie die am weitesten links gelegen Achse..



Was ist das kleinstmögliche Übersetzungsverhältnis, das noch echt größer als 1 ist und welches man mit 6 Zahnrädern mit – der Größe nach geordnet – 20, 30, 40, 50, 60 und 70 Zähnen konstruieren kann?