Mathematik - mehr als Denksport

18 September 2020

Diese Unterlagen enthalten die Aufgaben zum zweiten Teil **Sum of Us** des Turniers. Obwohl im Jahr 2020 ganz wenige Sportereignisse stattfinden konnten, beschäftigen wir uns zur Entschädigung damit, Mathematik zur Planung und Analyse von Sportwettkämpfen einzusetzen.

Lies, ehe du mit der Lösung beginnst, bitte erst erst die Instruktionen auf den folgenden Seiten genau durch. Noch mehr als in jedem bisherigen Turnier vertrauen wir bei dieser Online-Ausgabe auf eure sportliche Fairness und Ehrlichkeit bei der Durchführung.

Die Aufgaben wurden in diesem Jahr von Eline Degryse und Alexander Holvoet unter der Begleitung durch Joeri Van der Veken erstellt. Die Übersetzung ins Deutsche hat Carl Peter Fitting übernommen. Wir wünschen euch viel Spaß und viel Erfolg bei eurer Arbeit (und nicht zuviel Blut, Schweiß und Tränen..)

Die Organisatoren
Maarten Solleveld (Radboud Universiteit Nijmegen),
Rainer Kaenders und Stefan Hartmann (Universität Bonn),
Joeri Van der Veken (KU Leuven).

Regeln

Arbeitszeit

Die Turnierrunde dauert von 13:30 Uhr bis 15:00 Uhr.

Abgabe der Antworten

Es steht ein Word-Dokument (Antwortformular) mit Namen *Lösungen.docx* zur Verfügung. Dort müssen die Lösungen jeweils an der richtigen Stelle eingetragen werden; am Ende der Arbeitszeit muss das word-Dokument *unmittelbar* als Anhang mit einer Email an eine Mail-Adresse geschickt werden, die den Schulen noch mitgeteilt werden wird. Bitte tragt den Namen eurer Schule sicherheitshalber noch einmal auf dem Antwortformular ein. Manchmal muss man Formeln eintragen; dass könnte z.B. so aussehen:

(a+4b)/2=a/2+2*b .

Wenn von einer Schule mehrere Mails eingehen, werten wir die zuerst eingehende Mail als gültige Lösung.

Punkteverteilung

Aufgabe 1: $35 + 50 + 45 = 130$
Aufgabe 2: $50 + 45 + 50 + 45 = 190$
Aufgabe 3: $30 + 40 + 50 = 120$
Aufgabe 4: 60

Gesamtsumme: 500

Erlaubte Hilfsmittel

- Das Vorbereitende Material und die Lösung der darin enthaltenen Aufgaben
- Nicht-programmierbare, nicht-grafikfähige Taschenrechner
- Ein Computer, der aber **nur zum Versenden der Email mit dem Antwortformular als Anhang** dient.

Aufgabe 1: Hockey

Eine erste Aufgabe, der du dich stellen musst, ist die Organisation der Vorrunden einer großen Hockey-Meisterschaft. Die Vorrunden sollen in Gruppen ausgespielt werden, in denen jede Mannschaft gegen jede andere spielt. Nur die Besten rücken dann in die folgenden Meisterschaftskämpfe vor. Mit n bezeichnen wir die Anzahl der Teams in einer Gruppe, wobei n eine natürliche Zahl ist. **Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass n eine gerade Zahl ist und mindestens den Wert 4 hat.** Die Wettkämpfe in der Gruppe werden dann in Runden ausgetragen, wobei jedes Team in höchstens einmal während einer Runde spielt.

Teilaufgabe 1.1: Wie groß ist die Gesamtzahl der Wettkämpfe, die in einer Gruppe stattfinden müssen?
Teilaufgabe 1.2: Wie viele Kämpfe finden in einer Gruppe pro Runde statt, wenn in jeder Runde möglichst viele Mannschaften beteiligt sein sollen?

Jede Mannschaft absolviert einige Spiele im eigenen Stadion (Heimspiele) und andere in den Stadien anderer Mannschaften (Auswärtsspiel). Das kann für eine Mannschaft einen Vor-oder einen Nachteil bedeuten, und darum sollen die Wettkämpfe so zusammengestellt werden, dass jede Mannschaft höchstens ein Auswärtsspiel mehr oder weniger hat als sie Heimspiele hat. Außerdem finden Heim- und Auswärtsspiele idealerweise abwechselnd statt. Einer Mannschaft wird eine Pause (*Break*) verordnet, wenn das nicht der Fall ist, also wenn zwei aufeinanderfolgende Spiele beide Heim- oder beide Auswärtsspiele sind. Wenn eine Mannschaft zum Beispiel auswärts-auswärts-heim-heim-auswärts spielt, hat diese Mannschaft 2 Breaks.

Teilaufgabe 2: Ist es möglich, die Wettkämpfe so zu arrangieren, das kein Team ein Break bekommt? Falls nicht: wie viele Breaks pro Gruppe entstehen für alle Mannschaften zusammen mindestens? *Schreibt die Antwort auf die erste Frage (Ja/Nein) und die Antwort auf die zweite Frage in das jeweilige Feld des Antwortformulars*!

Zu einem Wettbewerb gehört es, dass schließlich eine Rangfolge der teilnehmenden Mannschaften erstellt und ein Gewinner benannt werden. In Abbildung 1 siehst du, welche Mannschaften gegen welche anderen gewonnen oder verloren haben (der Pfeil geht vom Verlierer zum Gewinner). Solch einen Graphen nennen wir einen *Turniergraphen.* Eine Rangliste entspricht einem Hamiltonschen Weg - und man kann beweisen, dass wirklich jeder Turniergraph einen Hamiltonschen Weg besitzt.

Teilaufgabe 3: Ist die Rangliste – oder entsprechend der Hamiltonsche Weg – , durch den Graphen in Abbildung 1 eindeutig bestimmt?
Achtung, bloßes Raten ist hier gefährlich. Bei einer falschen Antwort werden euch 45 Punkte von eurer Punktsumme abgezogen. Für „Wir wissen es nicht“ bekommt ihr 0 Punkte
Mögliche Antworten sind nur „Ja“ , „Wir wissen es nicht“ oder „Nein“.

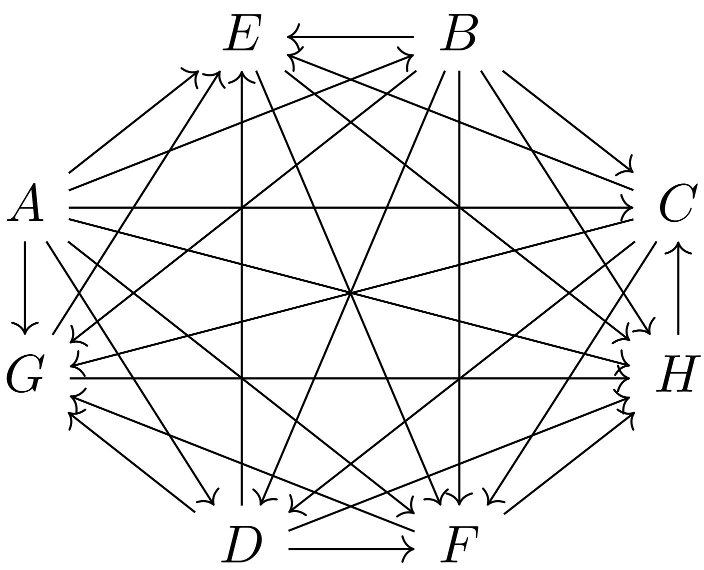

Abbildung 1

Aufgabe 2: Tischtennis

Zwei Teams mit je 5 Spielern $(0, \ldots, 4$ und $A, \ldots, E)$ stehen einander gegenüber. Es werden 5 Runden gespielt, sodass schließlich jeder Spieler des ersten Teams gegen jeden Spieler des zweiten Teams gespielt hat. Die 5 Spiele jeder Runde werden jeweils zu 5 verschiedenen Zeitpunkten während jeweils eines Spieltages ausgetragen. Die Medien bestehen darauf, dass die Topspiele so eingeplant werden, dass sie live zu guten Sendezeiten übertragen werden können. Die Spieler 0 und C sollen in der letzten Spielzeit eines Spieltages gegeneinander spielen – und ebenso 3 und B. Die Spieler 2 und A müssen außerdem in der zweiten Runde gegeneinander antreten.

Teilaufgabe 1: Konstruiere ein Eulerquadrat, das den gestellten Bedingungen genügt! Halte dich an die Bezeichnungen aus dem Vorbereitenden Material, sodass also eine Zeile des Quadrates für eine Turnierrunde steht und eine Spalte für einen Spielzeitpunkt: Wenn etwa $C4$ in der ersten Zeile und zweiten Spalte des Quadrates stünde, dann hieße das, dass C gegen 4 in der ersten Runde zur zweiten Spielzeit antreten muss.

Der mathematisch interessierte Tischtennisspieler 0 fragt sich, ob die Turnierplanung sein Elo-Rating beeinflusst.

Teilaufgabe 2: Hängt das zum Schluss des Turniers erreichte Elo-Rating eines Spielers von der Reihenfolge ab, in der seine Spiele angesetzt sind? Wir gehen davon aus, dass das Elo-Rating nach jedem Spiel für den Spieler 0 neu berechnet wird und bei der Berechnung die Ergebnisse aller Spiele bekannt sind.
Achtung, bloßes Raten ist hier gefährlich. Bei einer falschen Antwort werden euch von eurer Punktsumme 45 Punkte abgezogen. Für „Wir wissen es nicht“ bekommt ihr 0 Punkte
Mögliche Antworten sind nur „Ja“, „ Wir wissen es nicht“ oder „Nein“.

Er denkt nun auch über die eventuelle Transitivität des Elo-Ratings nach. Nehmen wir einmal an, dass es a mal wahrscheinlicher ist, dass ein Spieler X gegen einen Spieler Y gewinnt als dass er verliert, und dass es analog also b mal wahrscheinlicher ist, dass der Spieler Y gegen einen Spieler Z gewinnt als dass er verliert:

$$P\left(X \text{ gewinnt gegen } Y\right) = a \cdot P\left(X \text{ verliert gegen} Y\right).$$
$$P\left(Y \text{ gewinnt gegen } Z\right) = b \cdot P\left(Y \text{ verliert gegen} Z\right).$$

Teilaufgabe 3: Wie viel mal wahrscheinlicher ist es gemäß dem Elo-Ratingsystem, dass X gegen Z gewinnt als dass er das Spiel verliert?

Am Rande des richtigen Turniers will ein Fanclub selbst ein kleines Turnier in der Disziplin „Tischtennis-zu-Drritt“ austragen; betrachte dazu Abbildung 2.

Abbildung 2

Der Fanclub will dazu eine abgewandelte Form der Rotationsmethode nutzen, um die Runden festzulegen. Wir nehmen wir hier der Einfachheit halber an, dass die Anzahl n der Spieler ein Vielfaches von drei ist, sodass jeder Spieler in jeder Runde aktiv sein kann. Die Fans ordnen nun alle Spieler in einem ebenen regelmäßigen n-Eck an; diesmal spielt der Mittelpunkt des Vielecks keine Rolle. Ein Spiel zwischen drei Spielern stellen sie sich diesmal nicht als eine Strecke vor, sondern es wird durch ein Dreieck repräsentiert. Es soll für ein solch kleines Turnier egal sein, ob ein Spieler an einem Randtisch oder am mittleren Tisch spielt. Sie wollen für die erste Runde die Dreiecke so wählen, dass sie die Figur rotieren lassen und dabei alle möglichen Spielerkombinationen bzw. Dreiecke erfassen werden.

Teilaufgabe 4: Für welche Vielfachen von 3 funktioniert die so abgewandelte Rotationsmethode?

Aufgabe 3: Leichtathletik

Stelle dir vor, dass die Weltrekordhalter auf der 400-Meter-Strecke, Marita Koch (47.60 Sekunden) und Wayde van Niekerk (43.03 Sekunden), gegeneinander auf einem Wettkampfplatz wie in Abbildung 3 antreten. Wir nehmen an, dass beide durchweg mit der mittleren Geschwindigkeit ihrer Weltrekordläufe laufen. Marita läuft an der Innenkante der innersten Bahn, und Wayde an der Außenkante der äußersten Bahn.. Beide starten sie an der roten Linie links oben und rennen dann ihre Runde, bis sie wieder die rote Linie erreichen.

Teilaufgabe 1.1: Nach welcher Zeit (in Sekunden) kommt Marita an?
Teilaufgabe 1.2: Nach welcher Zeit (in Sekunden) kommt Wayde an?

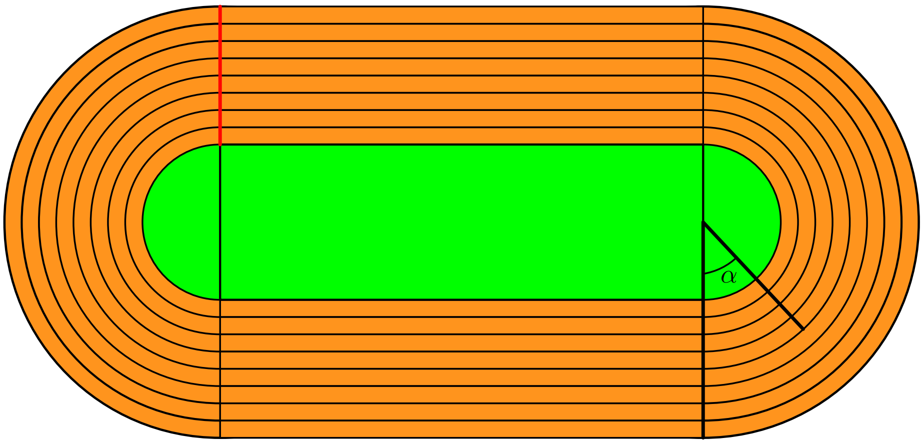

Abbildung 3 Der Wettkampfplatz besteht aus geradlinigen Teilen und aus Kreisbögen. Die innerste Laufbahn ist an der Innenseite genau 400 Meter lang. Jeder der geraden Anteile der innersten Bahn in 84,39 m lang. Jede Bahn ist 1.25 m breit. Die innerste Bahn nennen wir die erste Bahn, die äußerste die achte Bahn. Den eingezeichneten Winkel α benötigen wir in Aufgabenteil 2.

Es ist klar, dass bei einem fairen Wettkampf alle Läufer die gleiche Strecke zurücklegen sollen. Durch die gekrümmten Teile der Bahn müssen wir ihre Startpositionen also je nach Bahn anpassen. Das kann für jede Bahn durch den Winkel α in Abbildung 3 beschrieben werden.

Teilaufgabe 2: Bei einem Laufwettbewerb starten die Teilnehmer in dem rechts gelegenen Kreissegment, laufen gegen den Uhrzeigersinn, und die rote Linie links oben ist die gemeinsame Ziellinie. Jeder Teilnehmer läuft auf der Innenseite seiner Bahn. Das Rennen geht über 200 m. Berechne den in Abbildung 3 eingezeichneten Winkel α, der zur Startposition der fünften Bahn gehört!. *Notiere im Anwortformular das Gradmaß des Winkels!*

Die Sitzplätze für die Zuschauer müssen so gebaut sein, dass jeder die Ziellinie sehen kann. Die Abbildung 4 zeigt eine schematische Darstellung mit einigen vorgegebenen Abmessungen.

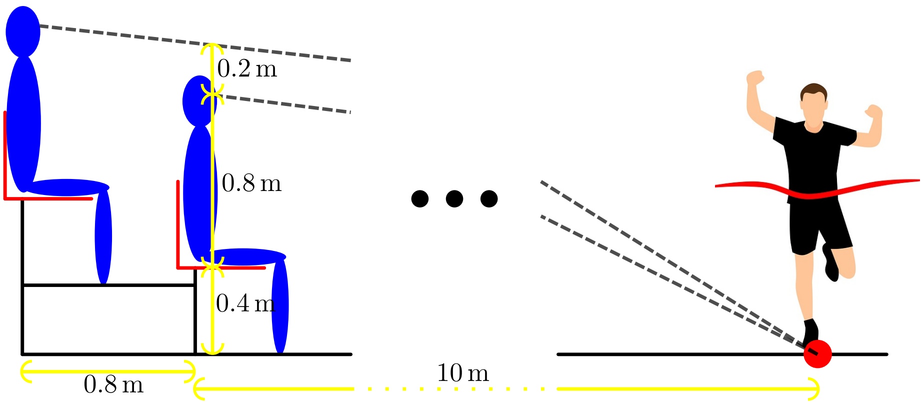

Abbildung 4 Der erste (in der Zeichnung rechte) und der zweite (linke) Sitzplatz sind eingezeichnet, aber natürlich folgen noch weiter links noch weitere, höher gelegene Sitzplätze. Zwischen allen Plätzen ist ein waagerechter Abstand von 80 Zentimetern vorgeschrieben. Jeder Zuschauer in dieser Vereinfachung hat eine Rumpflänge von 80 cm (gemessen von der Sitzfläche bis zur Augenhöhe). Die erste Sitzfläche liegt 40 cm über dem Boden. Alle hintereinander sitzenden Zuschauer schauen gespannt auf die Ziellinie, die hier durch einen roten Punkt dargestellt ist und die 10 Meter rechts vom ersten Sitzplatz liegt. Für jeden Zuschauer soll seine/ihr „Sehstrahl“ 20 cm oberhalb der Augenhöhe der vor ihr sitzenden Person verlaufen.

Teilaufgabe 3: Berechne, auf welcher Höhe (gemessen vom Boden bis zur Sitzfläche) der 5. Sitzplatz angebracht werden muss. *Notiere die Höhe in Metern auf dem Antwortformular; runde das Endergebnis auf 2 Nachkommastellen*

Aufgabe 4: Tennis

Rainer spielt ein Tennismatch gegen Peter. Bei jedem Punkt ist die Wahrscheinlichkeit, dass Rainer ihn gewinnt, gleich 60 %, und das soll unabhängig von allen vorherigen Punkten so sein.

Teilaufgabe 1: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Rainer das erste Spiel (Achtung: nicht das ganze Match oder einen Satz!) gewinnt? *Notiere im Antwortformular die Wahrscheinlichkeit als Prozentwert!*