29. Mathematik-Turnier

Staffel

2019

Radboud Universiteit · universität bonn · KU LEUVEN

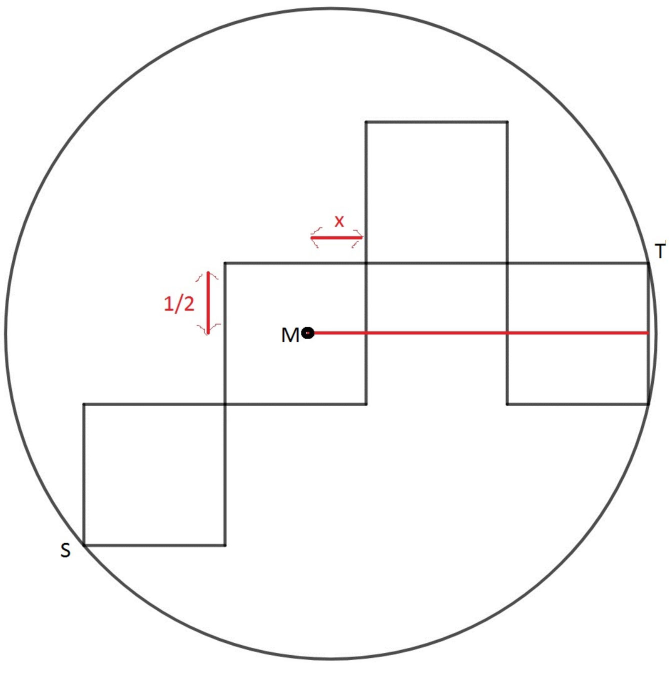
Ausarbeitung Aufgabe 1

Wenn wir nur auf die Minutenanzeige schauen, dann kommen dort die Ziffern 1 und 2 in jeder Stunde gleich oft vor. Unterschiede ergeben sich nur in den Stundenangaben. In den 24 möglichen Stundenzahlen (von 00 bis einschließlich 23) kommen insgesamt 13 mal die Ziffer 1 und 7 mal die 2 vor. Das ergibt einen Unterschied von 6 – für die Stundenangaben. Jede Stundenangabe kommt aber auf 60 Fotos vor (denn jede Stunde hat 60 Minuten). Der Gesamtunterschied berechnet sich dann zu

$$13 \cdot 60 - 7 \cdot 60 = 6 \cdot 60 = 360.$$

Ausarbeitung Aufgabe 2

Wir bestimmen den Mittelpunkt M des Kreises. Dieser liegt sicher im mittleren Quadrat und hat die Abstand $1/2$ sowohl von der Ober- als auch von der Unterkante des Quadrates. Wir nennen den Abstand von M zur rechten Kante des Quadrates x.



Den Radius r des Kreises können wir auf zwei Arten bestimmen, und zwar als $r = |MS|$

und auch als $r = |MT|$. Mit Pythagoras berechnen wir:

$$|MS|^2 = (2-x)^2 + (3/2)^2 = x^2 - 4x + 4 + 9/4,$$
$$|MT|^2 = (2+x)^2 + (1/2)^2 = x^2 + 4x + 4 + 1/4.$$

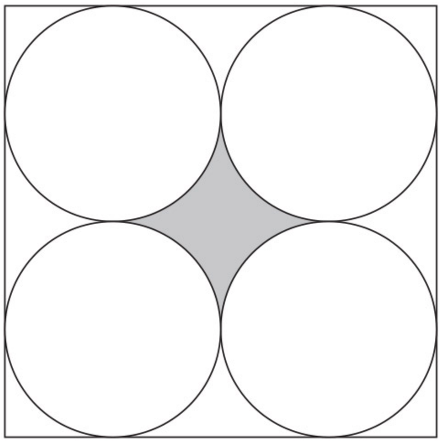
Gleichsetzen der beiden linken Gleichungsterme führt zu $8x - 8/4 = 0$, woraus sich $x = 1/4$ ergibt. Daraus folgt

$$r = \sqrt{(1/4)^2 + 4 \cdot 1/4 + 4 + 1/4} = \sqrt{85/16}.$$

Die Fläche der Scheibe berechnet sich damit zu $\pi r^2 = 85\pi/16 \approx 16,6897$.

Ausarbeitung Aufgabe 3

In der folgenden Zeichnung hat das große Quadrat eine Oberfläche von $4 \cdot 4 = 16$.



Jede der 4 Kreisscheiben hat die Fläche π, sodass der Rest des Quadrates ohne die Kreisscheiben die Fläche $16 - 4\pi$ besitzt. Dieser Rest ist 4 mal so groß wie das grau markierte Gebiet, das also die Fläche $(16 - 4\pi)/4 = 4 - \pi$ besitzt.

Ausarbeitung Aufgabe 4

Die erste Ziffer einer autobiographischen Zahl kann nicht 0 sein, denn sie gibt ja an, wie viele Nullen die Zahl enthält.

Wir versuchen zunächst, eine autobiographische Zahl mit vier Ziffern zu finden, die größer als 2020 ist. Die Summe der 4 Ziffern ist nun gleich der Anzahl der Ziffern, also gleich 4. Ziffern, die größer als 3 sind, können nicht vorkommen: dann müssten ja weitere Stellen vorhanden sein, in denen notiert ist, wie oft sie vorkämen. Nach unserer Annahme ist die erste Ziffer mindestens gleich 2, kann also nur die Werte 2 oder 3 haben. Aber 3 ist unmöglich, denn dann müsste die autobiografische Zahl 3 Nullen enthalten, also gleich 3000 sein – aber 3000 ist nicht autobiographisch. Wenn nun die erste Ziffer gleich 2 ist, dann enthält unsere Zahl 2 Nullen, und da die Summe der Ziffern 4 ist, müssen die folgenden Ziffern zwei mal die 0 und einmal die 2 sein. Man prüft die Möglichkeiten durch und findet, dass die einzige Möglichkeit 2020 selbst ist: größer geht es mit vier Ziffern nicht.

Nun suchen wir eine autobiographische Zahl *abcde* mit 5 Ziffern. Dann muss wieder gelten:

$$a + b + c + d + e = 5 \tag{1}$$

und Ziffern, die größer als 4 sind, können nicht vorkommen. Da wir eine möglichst kleine Zahl suchen und $a \neq 0$ ist, versuchen wir es mit $a = 1$. Dann gilt $b + c + d + e = 4$ und genau einer der Summanden ist gleich 0. Nun ist $b \neq 0$ (weil an der ersten Stelle ja schon eine 1 vorkommt) und $b \neq 1$ (denn dann enthielte unsere Zahl ja schon zwei mal die Ziffer 1). Wenn $b = 2$ wäre, dann wäre $2 \geq c \geq 1$. Der Fall $c = 2$ ist nicht möglich, da sonst wegen Gleichung (1) sowohl d als auch e den Wert 0 haben müssten - im Widerspruch zu $a = 1$. Also müsste dann $c = 1$ gelten. Da wäre aber - wieder wegen der Gleichung - genau eine der beiden Zahlen d oder e gleich 1 und die andere gleich 0. Aber es kommen ja weder die Ziffer 3 noch die Ziffer 4 vor. Wenn $b = 3$ wäre, dann folgte $d \geq 1$, und (1) würde uns die Zahl 13010 aufzwingen – eine Zahl, die leider nicht autobiographisch ist. Also ist $a = 1$ unmöglich.

Jetzt versuchen wir es also mit $a = 2$. Dann folgt$b + c + d + e = 3$ und in der Summen kommen genau zwei Nullen vor. Die Ziffern müssen also zwei Nullen, eine 1 und eine 2 (in irgendeiner Reihenfolge) enthalten. Offenbar kommt die Ziffer 3 und 4 in der Zahl nicht vor, sodass an der vierten und fünften Stelle der Zahl die Ziffer 0 stehen muss. Aber es kommt genau zweimal die 2 und genau einmal die 1 darin vor, also $b = 1$ und $c = 2$.

Die Zahl 21200 ist wirklich autobiographisch, und die gerade ausgeführte Argumentation zeigt sogar, dass das die einzige autobiographische Zahl mit fünf Ziffern ist.

Ausarbeitung Aufgabe 5

Die Seiten eines A0-Bogens haben das Produkt 1, sind also von der Form $a, 1/a$ für ein $a \geq 1$ (gemessen in Metern).

Die Seiten eines A1-Bogens sind $a/2$ und $1/a$, wobei $a/2 \leq 1/a$ gilt. Die Seiten eines A2-Bogens sind entsprechend $a/2$ und $1/(2a)$, die Seiten es A3-Bogens sind $1/(2a)$ und $a/4$. Also ergeben sich die Seiten eines A4-Blattes zu $a/4$ und $1/(4a)$, wobei jetzt $a/4 \geq 1/(4a)$ gilt.

Die Diagonaleneigenschaft bedeutet, dass das Verhältnis $a : 1/a$ das gleiche ist wie $1/a : a/2$. Also $a^2 : 1 = 2/a^2$ und damit $a = \sqrt[4]{2}$. Die gesuchte Länge ist dann $a/4 = \sqrt[4]{2}/4$ Meter oder auch $25\sqrt[4]{2} \approx 29,7302$ Zentimeter.

Ausarbeitung Aufgabe 6

Wir beweisen, dass der Plan 2-3-3-2 immer dafür sorgt, dass der menschliche Spieler gewinnt.

Wenn die erste Zahl von Miraculix die 2 ist, dann gewinnst du direkt. Wenn seine erste Zahl 4 ist, muss seine zweite Zahl 3 sein, und du gewinnst im zweiten Schritt.

Angenommen nun, die erste Zahl von Miraculix wäre die 1. Dann ist seine zweite Zahl notwendig die 2, aber das kannst du ja nicht wissen. Die dritte Zahl von Miraculix ist dann 1 oder 3. Wenn sie 3 ist, gewinnst du im dritten Schritt. Wenn sie aber 1 war, wird Miraculix als vierte Zahl die 2 nennen müssen und du gewinnst im vierten Schritt.

Wenn nun aber die erste Zahl von Miraculix die 3 ist, könnte seine zweite Zahl die 4 oder die 2 sein: wir können das nicht wissen. Wenn seine zweite Zahl die 4 war, dann muss seine dritte Zahl die 3 sein, und da erwischen wir ihn. War seine zweite Zahl die 2, und dann ist es wie im vorigen Fall und wir gewinnen im dritten oder vierten Schritt.

Ein anderer Gewinnplan ist 3-2-2-3: dieser entsteht aus 2-3-3-2, indem man die Symmetrie $1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3$ benutzt.

Andere Strategien führen nicht zum Ziel. Zum Beispiel scheitert der Plan 2-3-2-3, weil Miraculix 3-4-3-4 denken könnte.

Ausarbeitung Aufgabe 7

Wir bezeichnen den gesuchten Radius mir r. Es seien A der Mittelpunkt des großen Kreises, B der Mittelpunkt des linken einbeschriebenen Kreises und C der Mittelpunkt des schraffierten Kreises. Weiter sei D der gemeinsame Punkt der großen Kreislinie mit dem schraffierten Kreis. Es gilt: $|AD| = |AC|+|CD| = |AC|+r$. Mit dem Satz des Pythagoras bestimmen wir nun $|AC|$. $|AB|$ ist der Radius des linken Kreises, also $|AB| = 1$. Die Strecke BC zerfällt in einen Teil, der der Radius des linken Kreises ist, und einen Teil, der gerade der Radius des schraffierten Kreises ist. Also gilt: $|BC| = 1+r$. Der Pythagoras im Dreieck ABC sagt dann, dass $|AC|^2 = (1 + r)^2 - 1^2 = r^2 + 2r$.

Diese Erkenntnis kombinieren wir mit

$$2 = |AD| = |AC| + r = \sqrt{r^2 + 2r} + r.$$

Dann folgt $r^2 + 2r = (2 - r)^2 = r^2 - 4r + 4$, also $6r = 4$ und $r = 2/3$.

Ausarbeitung Aufgabe 8

Wir vergleichen Worte die sich nur um genau einen Buchstaben unterscheiden. Dadurch erhalten wir Buchstabenpaare, die von verschiedenen Spielsteinen stammen müssen: die Buchstaben eines solchen Paares müssen jeweils vom gleichen Spielstein stammen. Solche Paare sind K und P, A und U, S und T. Wegen PAS gehören diese drei Paare zu verschiedenen Spielsteinen. Um TS zu vervollständigen, müssen wir wegen MOP einen Buchstab aus MO wählen und einen aus IL (wegen UIL). Insbesondere stehen Z und N nicht auf dem gleichen Spielstein wie TS. Angesichts ZON sehen wir, dass auf dem TS-Würfel auch das O stehen muss. Aus MOP sehen wir dann, dass AUM auf einem anderen Spielstein steht. Bis jetzt wissen wir also:

KP, AMU, OST

Wegen MIN ist der vierte Buchstabe bei OST ein I oder ein N. Wir wussten schon, dass es sich um ein L oder ein I handelte: also muss es das I sein. Daher steht N auf dem gleichen Spielstein wie KP (wegen MIN). Insgesamt ergibt das:

KNP, AMU, IOST

Wegen ZON erhalten wir AMUZ, und wegen UIL bekommen wir KLNP.

Ausarbeitung Aufgabe 9

Fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen bilden eine Folge $k, k+1, k+2, k+3, k+4$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Deren Summe ist $5k+10$; n muss also ein Vielfaches von 5 sein. Sechs aufeinanderfolgende Zahlen – also $l, l+1, l+2, l+3, l+4, l+5$ – haben sie Summe $6l+15 = 6(l+2)+3$. Die Zahl n muss also bei der Division durch 6 den Rest 3 lassen. Nun ist

$$n = 6(l+2)+3 = 5(l+2)+(l+2)+3 = 5(l+3)+l$$

Da n ein Vielfaches von 5 ist, muss also l auch ein Vielfaches von 5 sein, also $l = 5 \cdot l'$. Damit:

$$n = 5(5l'+3)+5l' = 30l'+15.$$

Sieben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, also $m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5, m+6$, haben sie Summe $7m+21 = 7(m+3)$. Also ist n ein Vielfaches von 7. Weiter gilt

$$n = 30l'+15 = 28l'+21+2l'-6 = 7(4l'+3)+2(l'-3)$$

Das ist genau dann ein Vielfaches von 7, wenn $2(l'-3)$ durch 7 teilbar ist, und das geht nur, wenn $l'-3$ ein Vielfaches von 7 ist. Wir schreiben $l' = 7m'+3$. Dann gilt

$$n = 30 \cdot (7m'+3)+15 = 210m'+90+15 = 210m'+105.$$

Die kleinste Möglichkeit, um aus diesem Term eine Zahl über 200 herzustellen, ergibt sich durch $m' = 1$. Dann ist $n = 210+105 = 315$.

Ausarbeitung Aufgabe 10

Die Piraten heißen – in der Reihenfolge ihres Alters, wobei Axtkopf der älteste ist – Axtkopf, Brecher, Ciller, Draufhau und Eisenbeiß. Und wir argumentieren, indem wir mit kleineren Piratengruppen beginnen.

2 Piraten: Draufhau verteilt den Schatz im Verhältnis 100 : 0 (also bekommt er selbst alles). Seine eine Stimme ist nämlich genug, um diesen Vorschlag durchzusetzen.

3 Piraten: Ciller schlägt 99 : 0 : 1 vor. Eisenbeiß wird das akzeptieren, obwohl der nur ein Goldstück bekommt. Lehnt er es nämlich ab, geht Ciller über Bord und – wie wir eben gesehen haben – Eisenbeiß geht dann leer aus.

Es wäre für Ciller keine gute Idee, 100 : 0 : 0 vorzuschlagen. Dann wüsste Eisenbeiß nämlich, dass er – egal, ob er dem Vorschlag zustimmt oder nicht – auf jeden Fall 0 Goldmünzen bekommt und im Blutrausch würde Ciller den Vorschlag nicht überleben.

4 Piraten: Brecher verteilt die Beute 99 : 0 : 1 : 0. Draufhau wird das akzeptieren, weil er sonst – im Falle von drei Piraten – gar nichts bekommt. Die zwei Stimmen von Draufhau und Brecher sind nun die Hälfte der Stimmen, und der Vorschlag wird angenommen.

5 Piraten: Axtkopf schlägt die Verteilung 98 : 0 : 1 : 0 : 1 vor. Ciller und Eisenbeiß machen sich klar, dass sie im Fall der vier Piraten, also bei einer Ablehnung des Vorschlags,

leer ausgehen würde. Zusammen mit diesen beiden Stimmen hat Axtkopfs Vorschlag die notwendige Mehrheit. Axtkopf bekommt also 98 Goldstücke.

Axtkopf kann auch nicht noch besser aus der Geschichte herauskommen. Wenn er einen Vorschlag macht, bei dem er 99 Goldstücke bekommt, werden Ciller oder Eisenbeiß leer ausgehen. Für Brecher und Draufhau ist der Vorschlag sicher nicht günstiger als der Vorschlag bei 4 Piraten, also stimmen sie auf jeden Fall gegen der Vorschlag. Die Anzahl der Goldstücke für Ciller bzw. Eisenbeiß wird es nichts ausmachen, ob sie dafür oder dagegen stimmen: einer wird Axtkopf deswegen den Haien vorwerfen.

Ausarbeitung Aufgabe 11

(A) und (B) widersprechen einander, können also nicht beide wahr sein. Also ist (C) sicher nicht wahr, sodass (A) auch nicht wahr sein kann. Wenn nun (B) wahr wäre, dann wäre insbesondere (D) falsch, obwohl die Aussage von (D) doch offenbar zuträfe. Also kann (B) nicht wahr sein. Dann sind also (A), (B) und (C) falsch, und damit (D) ebenfalls. (E) wäre dann wahr und damit kann schließlich (F) nicht wahr sein

Ausarbeitung Aufgabe 12

Wir benutzen die Division mit Rest, um die Aufgabe zu vereinfachen. Am praktischsten ist es dabei mit der (-1) aus dem Nenner zu beginnen, weil die Division ganzer Zahlen durch (-1) eben wieder ganze Zahlen entstehen lässt. Mit dieser Division lassen wir niedrige Potenzen aus $9n^2 + 16n - 4$ verschwinden:

$$\begin{array}{rrrrl}
(-1+2n) \; / \; (-4 & +16n & +9n^2) & = & 4-8n \\
\underline{-4} & \underline{+8n} & & & \\
 & 8n & +9n^2 & & \\
 & \underline{8n} & \underline{-16n^2} & & \\
 & & 25n^2 & &
\end{array}$$

Wir sehen also, dass

$$\frac{9n^2 + 16n - 4}{2n - 1} = 4 - 8n + \frac{25n^2}{2n - 1}.$$

Dieser Term steht genau dann für eine ganze Zahl, wenn $\dfrac{25n^2}{2n-1}$ eine ganze Zahl liefert. Da nun

$$\mathrm{ggT}(n, 2n - 1) = \mathrm{ggT}(n, -1) = 1$$

ist, geschieht das genau dann, wenn $2n - 1$ ein Teiler von 25 ist. Die Teiler von 25 sind 1, 5 und 25; sie gehören zu $n = 1$, $n = 3$ und $n = 13$. Für genau diese Werte von n steht der gegebene Bruchterm für eine ganze Zahl.

Ausarbeitung Aufgabe 13

Auf der Höhe von 400 m hat Luis genau 1/5 der Höhe des Berges geschafft. Der Umfang des Berges ist auf dieser Höhe 4/5 seines Umfanges auf Höhe 0.

Die Situation ist also die gleiche wie zu Beginn der Wanderung - wobei alles um den Faktor 4/5 umskaliert werden muss. Durch die Fortsetzung seines Weges (die nun genau 4/5 mal so lang ist wie das erste Wegstück) kommt Luis wieder an der gegenüberliegende Bergseite und nun oberhalb seines Startpunktes aus. Die Anzahl der Höhenmeter, die er dabei schafft, ist $400 \cdot 4/5 = 320$, sodass Luis nun 720 m über dem Startpunkt steht.

Ausarbeitung Aufgabe **14**

Es sei P_n die Anzahl der Punkte im n-ten Schritt. In der Zeichnung erkennen wir, dass $P_1 = 1$ en

$$P_n = P_{n-1} + 3n - 2 \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Nun gibt es eine Formel für P_n, die zwar nicht einfach zu finden ist – die man aber einfach verifizieren kann, wenn man sie einmal hat.. Definiere $a_n = (3n^2 - n)/2$. Dann ist $a_1 = 1$ und

$$\begin{aligned} 2(a_n - a_{n-1}) &= (3n^2 - n) - \big(3(n-1)^2 - (n-1)\big) \\ &= 3n^2 - n - (3n^2 - 6n + 3 - n + 1) = 6n - 4. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$ gilt, und das ist dieselbe Gleichung, die P_n festlegt.. Da auch $P_1 = a_1$, folgt hieraus durch Induktion, dass $P_n = a_n$ für alle n gilt.

Insbesondere ist

$$P_{2020} = a_{2020} = (3 \cdot 2020^2 - 2020)/2 = (12241200 - 2020)/2 = 6119590$$

Eine Art, um an die Formel P_n zu kommen, verwendet den Ansatz $P_n = an^2 + bn + c$, wobei a, b und c Brüche sein dürfen. Aus der Rekursionsgleichung liest man durch Koeffizientenvergleich ab, dass $b = -2a + b + 3$ und $c = a - b + c - 2$ gelten muss. Daraus folgt $a = 3/2$ und $b = -1/2$. Aus dem Anfangswert $P_1 = 1$ erhalten wir noch $c = 0$. Wenn die Formel für die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen bekannt ist:

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{2} N(N+1),$$

so ergibt sich aus der Rekursion die einfachere Herleitung

$$P_n = 1 + sum_{i=2}^{n}(3i - 2) = 1 + \frac{3}{2} n(n+1) - 3 - 2(n-1) = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Ausarbeitung Aufgabe **15**

Die einzigen Zahlen, die vier der fünf Bedingungen erfüllen könnten, sind 50 und 52. Aber 50 ist kein um 2 vermindertes Vielfaches von 9, erfüllt also auch (iv) nicht. Und 52 erfüllt $52 = 6 \cdot 9 - 2$ zwar die Forderung (v), ist aber nicht die Summe von Quadraten verschiedener Primzahlen. Die einzigen Primzahlen, die dafür in Betracht kämen, wären nämlich $2, 3, 5$ und 7. Aber $7^2 = 49 < 52$ und schon $7^2 + 2^2 = 53 > 52$. Auch ohne 7^2 geht es nicht, denn $2^2 + 3^2 + 5^2 = 4 + 9 + 25 = 38 < 52$.

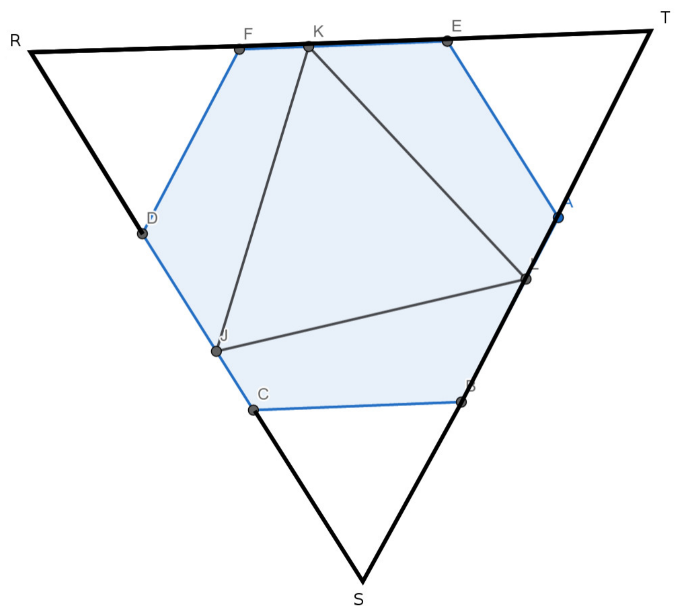
Jede andere Zahl, die drei der fünf Eigenschaften besitzt, muss (iii), (iv) und (v) erfüllen. Dann muss sie sogar ein um 2 vermindertes Vielfaches von 18 sein. Die kleinste Möglichkeit dafür wäre die Zahl 16, aber 16 erfüllt (iv) nicht, da $4^2 = 16$ kein Quadrat einer Primzahl ist und $2^2 + 3^2 = 13 < 16$ ist. Die nächstkleinere Möglichkeit ist dann die 34, und die kann wirklich geschrieben werden als $3^2 + 5^2 = 9 + 25$. Also ist 34 die kleinste Zahl, die drei der fünf Bedingungen genügt.

Ausarbeitung Aufgabe 16

Wir legen die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks auf die Längeneinheit 1 fest. Das Sechseck ist die Vereinigung von sechs gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 1. Jedes dieser Dreiecke hat ein Flächenmaß von $\sqrt{3}/4$, und daraus ergibt sich das Flächenmaß des Sechsecks zu

$$6 \cdot \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2$$

Nun sollten wie $|JL|$ bestimmen. Indem wir Seiten CD, EF und AB verlängern, betten wir das Sechseck in ein großes gleichseitiges Dreieck $\triangle RST$ mit der Seitenlänge 3 sein.Dabei ist S der Schnittüunkt der Verlängerung von DC mit der der Verlängerung von AB.



Nun schauen wir das Dreieck $\triangle JLS$ an. Nach Konstruktion gilt $|JS| = 4/3$ und $|LS| = 5/3$. Nach dem Cosinussatz folgt

$$\begin{aligned} |JL|^2 &= |JS|^2 + |LS|^2 - 2|JS|\,|LS|\cos(60°) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\frac{4}{3}\frac{5}{3}\frac{1}{2} \\ &= \frac{16 + 25 - 20}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Also $|JL| = \sqrt{7/3}$. Das Flächenmaß des gleichseitigen Dreiecks $\triangle JKL$ ergibt sich damit zu

$$\sqrt{3}/4 \cdot \sqrt{7/3}^2 = 7\sqrt{3}/12$$

Nun können wir das gesuchte Verhältnis der Fläche von

$$\frac{7\sqrt{3}/12}{3\sqrt{3}/2} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 12} = \frac{7}{18} = 0,3\overline{8}$$

Ausarbeitung Aufgabe **17**

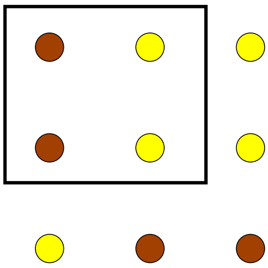
Wir suchen p und A mit der Eigenschaft, dass $A \cdot p/100 = 2020$. Dann ist $A \cdot p = 202\,000$. Aus $A \leq 10\,000$ folgt $p \geq \frac{202\,000}{10\,000} = 20{,}2$.

Die Zahl p teilt $202\,000 = 101 \cdot 2000$. Da 101 prim ist und $p > 20$ kein Teiler ist von 101, muss p also ein Teiler von 2000 sein. Die Teiler von 2000, die zwischen 21 und 100 liegen, sind $25, 40, 50, 80$ und 100. Das ergibt für A dann jeweils entsprechend $8080, 5050, 4040, 2525$ en 2020.

Also gibt es genau fünf mögliche Paare (p, A).

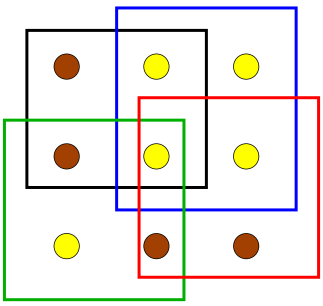
Ausarbeitung Aufgabe **18**

Betrachte erst einmal vier Münzen, die ein kleines Quadrat bilden – zum Beispiel das kleine Quiadrat links oben.



Anfangs ist die Anzahl der gezeigten Kopfseiten der Münzen in diesem kleinen Quadrat natürlich gerade. Wenn man eine Reihe oder eine Spalte in dem großen Quadrat umdreht, dann verändert man in dem kleinen Quadrat entweder gar keine oder zwei Münzen.Die Anzahl der Köpfe in dem kleinen Quadrat bleibt also immer gerade.

Das Gleiche gilt natürlich für die anderen kleinen Quadrate aus 4 Münzen, die rechts oben, links unten oder rechts unten liegen.



Nun zählen wir, wie viele Muster diese Bedingungen erfüllen. Wir beginnen mit dem kleinen Quadrat links oben. Für die drei Münzen, die die linke obere Ecke bilden, legen wir Kopf oder Zahl willkürlich fest. Dazu gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten. Dann liegt die vierte Münze im linken oberen kleinen Quadrat - zugleich die Münze in der Mitte des großen Quadrates (wegen der Bedingung für das kleine Quadrat links oben) fest.

Nun schauen wir das kleine Quadrat rechts oben an. Die beiden linken Münzen in diesem Quadrat haben wir bereits festgelegt; es kann sein, dass wir von diesen beiden Münzen nun gerade oder eine ungerade Anzahl von Köpfen im rechten oberen Quadrat geerbt haben. Für die beiden fehlenden Münzen im rechten oberen Quadrat bleiben nur jeweils 2 Möglichkeiten die dafür sorgen, dass dann in diesem Quadrat eine gerade Anzahl von Köpfen auftritt.

Für die Quadrate in den obersten zwei Reihen können wir also eines von $8 \cdot 2 = 16$ Mustern auswählen.

Nun betrachten wir das kleine Quadrat links unten. Mit einer Argmentation, die ebenso abläuft wie die für das rechte obere Quadrat, sehen wir, dass man es jeweils auf 2 Möglichkeiten so anfüllen kann, dass die Anzahl der Köpfe in ihm gerade ist. Nun sind alle Wahlen getroffen - außer für die Münze in der rechten unteren Ecke des großen Quadrates. Aber diese Münze wird durch die Bedingung für das rechte untere kleine Quadrat festgelegt.

Insgesamt finden wir so $16 \cdot 2 = 32$ mögliche Muster.

Das sagt nun leider noch nicht, dass alle diese 32 Muster auch wirklich durch die erlaubten Operationen am großen Quadrat herstellbar sind: dem gehen wir noch nach. In dem linken oberen kleinen Quadrat kann man wirklich alle 8 Möglichkeiten herstellen, indem man die linke Spalte, die mittlere Spalte oder die oberen beiden Reihen des großen Quadrates umdreht – das sieht man am einfachsten, indem man es eben ausprobiert.

Wenn wir auf diese Art links oben ein 2×2-Muster hergestellt haben, dann steht daneben recht oben ein Muster, das den Bedingungen an die kleinen Quadrate ja genügt. Auf den oberen zwei Reihen ist dann jeweils noch genau ein anderes solches Muster möglich - und das stellen wir her, indem wir die rechte Spalte umdrehen.

Auch links unten steht danach ein zulässiges 2×2-Muster. Es besteht außer der im Moment vorhandenen Belegung der untersten Reihe stets noch genau eine andere Möglichkeit, sie so zu belegen, dass die Anzahl der Köpfe in dem Teilquadrat gerade bleibt, und die stellt man her, indem man die Münzen der unteren Reihe im großen Quadrat umdreht. Die Münze in der rechten unteren Ecke des großen Quadrates liegt nun fest: für sie entsteht kein weiterer Handlungsbedarf.

Wir halten fest, dass alle 32 Muster, die die Bedingungen an die kleinen 2×2-Quadrate erfüllen, auch durch die erlaubten Operationen am großen Quadrat erzeugt werden können.

Ausarbeitung Aufgabe 19

Nach den Angaben zur Konstruktion gilt:

$$|AB| : |BC| = |PQ| : |PS| = |BC| : |PS|,$$
$$|AB| \cdot |BC| \cdot \frac{64}{100} = |PQ| \cdot |PS| = |BC| \cdot |PS|.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $|PS| = |BC|^2 : |AB|$. Das setzen wir in die zweite Gleichung ein:

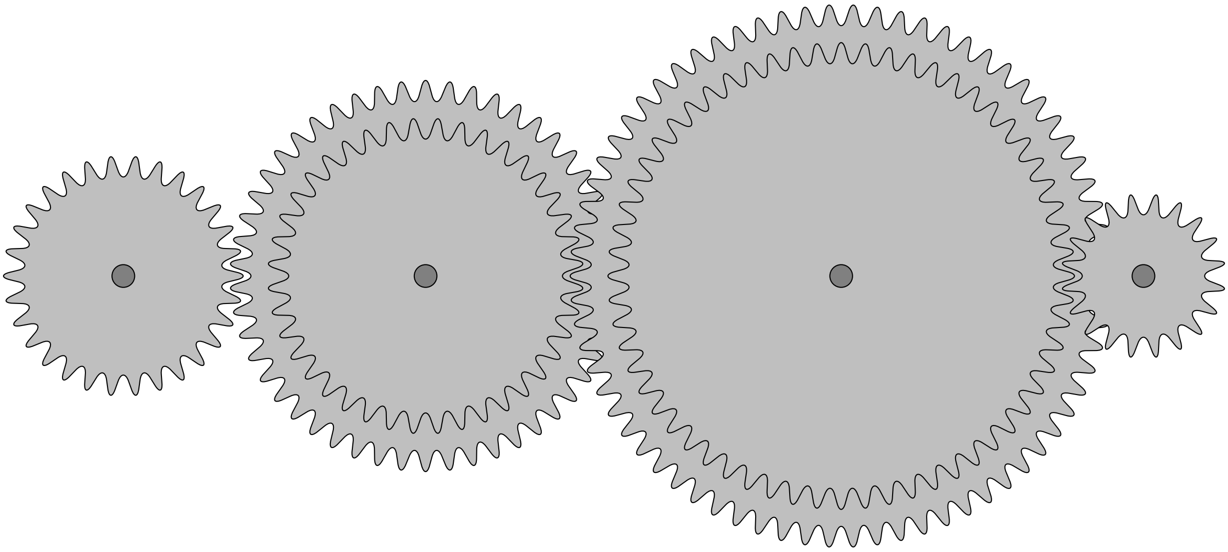
$$|AB| \cdot |BC| \cdot \frac{64}{100} = |BC| \cdot |PS| = |BC|^3 : |AB|.$$

Hieraus schließen wir, dass $|AB|^2 \cdot \frac{64}{100} = |BC|^2$ ist, also

$$|BC| = |AB| \cdot \sqrt{\frac{64}{100}} = |AB| \cdot \frac{8}{10} = |AB| \cdot \frac{4}{5}$$

Dann ist $|AB| : |BC| = 5/4$.

Ausarbeitung Aufgabe **20**



Die drei Zahnradübergänge wählen wir beispielsweise wie folgt: von 30 Zähnen nach 50 Zähne, von 40 nach 70 und von 60 nach 20. Das Übersetzungsverhältnis wird dann

$$\frac{30 \cdot 40 \cdot 60}{50 \cdot 70 \cdot 20} = \frac{72\,000}{70\,000} = \frac{36}{35}$$

Besser bekommt man das nicht hin, denn das Übersetzungsverhältnis jeder Kombination kann man in der Form a/b schreiben, wobei

$$a \cdot b = 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 = 10^6 \cdot 7! = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7.$$

In einer gekürzten Schreibweise von a/b bleiben also in jedem Fall ein Primfaktor 5 und ein Primfaktor 7 erhalten. Also hat a/b die Form $c \cdot 5/7, c \cdot 7/5, c/35$ oder $35 \cdot c$, wobei c ein Bruch ist, der aus den Primfaktoren 2, 3 und 5 hergestellt werden kann. Mit solchem c ist es nicht möglich, näher an 5/7 oder 7/5 heranzukommen als mit dem Faktor 35/36. Die beste Näherung an 1/35 mit solch einem c ist 1/36, und bei 35/36 und 36/35 ist die erste Lösung ausgeschlossen, da diese kleiner als 1 ist.