Internationales Mathematikturnier 2020
Vorbereitendes Material

Das Internationale Mathematikturnier gliedert sich in zwei Runden: die **Staffel** am Vormittag und die **Sum of Us** am Nachmittag. Bei der Sum of Us geht es jedesmal um eine Anwendung der Mathematik, und in diesem Jahr geht es um **Mathematik und Sport**. Mathematik spielt auch eine zentrale Rolle bei der Vorbereitung von Sportwettkämpfen, bei den Auswertungssystemen und bei der Erstellung von Ranglisten in einem Wettkampf. Oft findet man die Aussage, dass Mathematik eigentlich eng mit Denksport verwandt ist - aber Mathematik ist eben mehr als Denksport.

Das Vorbereitende Material sorgt dafür, dass ihr für die Sum of Us gut gewappnet seid und sie erfolgreich bearbeiten könnt. Es werden fünf verschiedene mathematische Begriffe besprochen und es wird an Beispielen gezeigt, welche Rolle sie etwa bei der Planung eines Schachturniers und der Analyse von dessen Ergebnissen spielen. Es folgen zwei Anhänge: einer über das Vergabesystem von Punkten beim Tennis und einer über das sogenannte Elo-Rating. Das Material enthält eine Reihe von Übungsaufgaben; ganz am Ende findet man dann auch die Lösungen zu diesen Aufgaben.

Während des Turniers und während ihr am Turniertag an der Sum of Us arbeitet, dürft ihr das Vorbereitende Material und eure Ausarbeitungen dazu benutzen - und auch einen („altmodischen“) Taschenrechner, der aber nicht programmierbar und nicht grafikfähig sein darf. Es ist wirklich ratsam, das Vorbereitende Material intensiv vor dem Turniertag durchgearbeitet zu haben.

In diesem Jahr wurde das Vorbereitende Material von Eline Degryse und Alexander Holvoet erstellt. Beide studieren Mathematik an der Königlichen Universität Leuven und wurden bei ihrer Arbeit begleitet durch Joeri Van der Veken.

Wir wünschen euch viel Spaß und viel Erfolg beim Turnier!

Organisatoren:
Joeri Van der Veken (KU Leuven)
Maarten Solleveld (Radboud Universiteit Nijmegen)
Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)

Inhaltsverzeichnis

1 Graphen

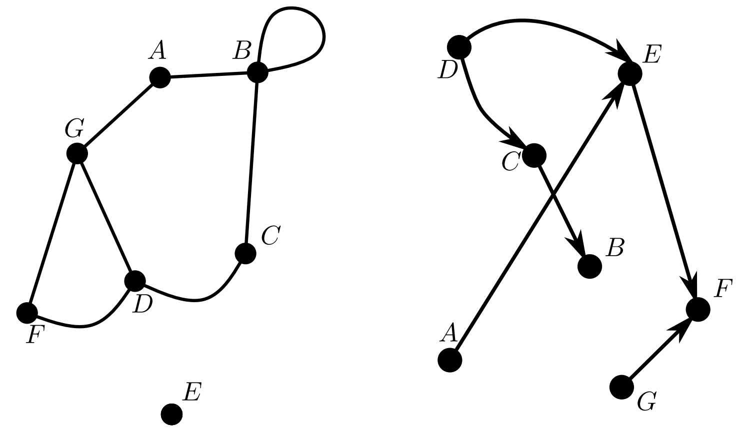
[1]

Ein *Graph* besteht aus einer Menge von Punkten, die wir *Knoten* nennen, und einer Menge von Verbindungen zwischen solchen Knoten, die *Kanten* heißen. Oft ist es nicht wichtig, welcher Knoten als Anfangs- oder Endpunkt einer Kante betrachtet wird; wenn das aber von Bedeutung ist, sprechen wir von einem *gerichteten Graphen* und deuten das in Skizzen durch Pfeile an. Die untenstehende Abbildung 1 zeigt zwei Beispiel für Graphen. Die Knotenmenge ist in beiden Fällen $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. Im Falle des nicht gerichteten Graphen ist die Kantenmenge

$$\{[A, B], [A, G], [B, B], [B, C], [C, D], [D, F], [D, G], [F, G]\}.$$

Für den gerichteten Graphen beachten wir die Reihenfolge in der Notation und finden also die Kanten

$$\{[A, E], [C, B], [D, C], [D, E], [E, F], [G, F]\}.$$



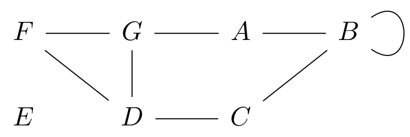
(a) Ein nicht gerichteter Graph.

(b) Ein gerichteter Graph.

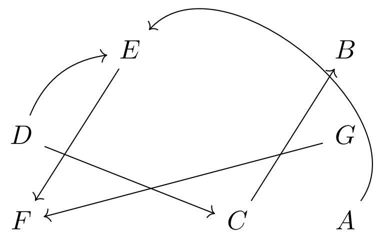
Abbildung 1

Wir sehen, dass die geometrische Gestalt der Kanten keine Rolle spielt. Die Kante $[D, C]$, die in beiden Graphen vorkommt, ist ein wenig gebogen, aber sie könnte genauso gut eine gerade Strecke sein oder rund um E verlaufen. Das Wichtige bei Kanten ist nur, welche Knoten sie verbinden, und um sie zu zeichnen, kann man so viele Schnörkel machen wie man will, solange die richtigen Endpunkte verbunden werden. Einfacherweise wird ein Graph auch so wie in Abbildung 2 dargestellt. Dabei wird jeder Knoten nur durch seinen Namen dargestellt und die Kanten sind meist Strecken.

[1] In diesem Text wird durchgehend das generische Maskulinum benutzt. Dies geschieht ohne diskriminierende Absicht und dient ausschließlich der Verbesserung der Lesbarkeit



(a) Der gleiche nicht-gerichtete Graph wie in Abbildung 1a.



(b) Der selbe gerichtete Graph wie in Abbildung 1b.

Abbildung 2

Wir betrachten einige Anwendungen. In einem Schachklub wird darüber Buch geführt, wer schon gegen wen gespielt hat. Das geschieht, indem man sich die Spieler als Knoten vorstellt und eine Kante zwischen jene Spieler zeichnet, die schon gegeneinander gespielt haben. Der Sieger kann verdeutlicht werden, indem man einen gerichteten Graphen verwendet: man gibt der Kante etwa die Richtung vom Verlierer zum Gewinner. Richtungspfeile könnten natürlich auch benutzt werden, um zu zeigen, welcher Spieler welche Farbe gespielt hat - so wie es in anderen Sportarten wichtig ist, ob es sich um ein Heim- oder ein Auswärtsspiel handelt. Wir können auch den *Grad* eines Knotens definieren als die Anzahl der Kanten, die in diesem Knoten beginnen oder enden. Im Zusammenhang mit dem Schachklub würde der Grad dann angeben, wie viele Spiele der betreffende Spieler schon absolviert hat.

Aufgabe 1: Konstruiere einen Graphen, bei dem jeder Knoten den Grad 7 hat!

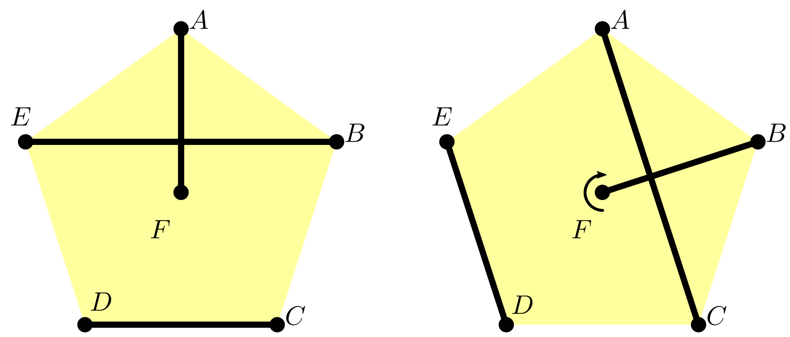
Wir schauen uns nun Wettkämpfe an, die in Gruppen organisiert werden. Dabei tritt jeder Spieler gegen jeden anderen Spieler seiner Gruppe an. Das bedeutet, dass in dem Graphen, der die Spiele einer Gruppe darstellt, jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist. So entsteht ein *vollständiger Graph*. Nun kann man diese Spiele nicht alle gleichzeitig austragen, weil ja sonst jeder Spieler an mehreren Spielort zugleich in verschiedenen Spielen sein müsste.Wir wollen die Spiele also auf mehrere Runden verteilen, wobei in jeder Runde jeder Spieler immer nur ein Spiel absolvieren muss. Wenn die Anzahl der Spieler ungerade ist, kann das nicht funktionieren: immer, wenn man die Spieler in Paare aufteilt, bleibt ein Spieler ohne Partner. In diesem Fall führt man einen Dummy-Spieler ein: das ist ein (in Wirklichkeit gar nicht existierender) „Spieler“, gegen den jeder andere Spieler einmal antreten muss. Tatsächlich bedeutet das, dass der „echte“ Spieler in dieser Runde frei hat. Wir gehen im Folgenden deswegen davon aus, dass wir es mit einer geraden Anzahl von Spielern zu tun haben: entweder ist sie wirklich gerade oder sie ist eigentlich ungerade und wir nehmen einen Dummy-Spieler dazu.

Es gibt einen einfachen Algorithmus, um die Spiele einer Runde festzulegen. Man kann ihn anhand von Abbildung 3 verfolgen. Wir nehmen an, dass die Gruppe n Spieler umfasst, wobei n eine gerade Zahl ist. Wir platzieren einen Spieler im Zentrum und die anderen $n-1$ Spieler als Eckpunkte eines regelmäßigen

Vielecks um den ersten herum. Dann verbindet man den im Zentrum stehenden Spieler mit einem der Äußeren: danach verbindet man die beiden Nachbarn des gewählten äußeren Spielers miteinander, dann wiederum deren Nachbarn usw., bis alle Spieler einen Partner haben. Indem man nun alle gezeichneten Strecken um den Mittelpunkt dreht, kann man die nächsten Runden festlegen. Für jede Runde dreht man die Kanten im Uhrzeigersinn um einen Winkel von $\frac{360°}{n-1}$.

Aufgabe 2: Finde einen Beweis für die folgende Aussagen:

- Sobald das Muster der für die erste Runde gezeichneten Kanten eine volle Umdrehung vollzogen hat, hat jeder Spieler gegen jeden anderen gespielt.
- Jeder Spieler spielt nur einmal in jeder Runde..



(a) Runde 1 **(b)** Runde 2

Abbildung 3 Organisation der ersten zwei Runden mit Hilfe der Rotationsmethode in einer Gruppe von 6 Spielern.

Aufgabe 3: Wende die Rotationsmethode auf alle Runden in einer Gruppe von 4 Spielern an und notiere für jede Runde, wer gegen wen antritt.

Wir besprechen noch zwei interessante Eigenschaften von Graphen.

Zum Einen ist es möglich, *Wege* in einem Graphen zu suchen. Ein Weg ist eine Folge von Knotenpunkten entlang von Kanten des Graphen, wobei jede benutzte Kante nur einmal gebraucht wird. In Abbildung 1a finden wir zum Beispiel einen Weg, der von D nach C, weiter nach B, dann wieder zu B und über A zum Endpunkt G führt. Ein anderer Weg ist die direkte Verbindung von D und G. Bei gerichteten Graphen müssen wir die Pfeilrichtung beachten, wenn wir Wege konstruieren. Ein *Hamiltonscher Weg* ist ein Weg, auf dem man alle Knoten des Graphen genau einmal besucht. Eine mögliche Eigenschaft eines Graphen ist also, ob er einen Hamitonschen Weg zulässt oder nicht.

Aufgabe 4: Finde in Abbildung 1a alle Weg zwischen A und C.

Aufgabe 5: Zeichne einen Graphen, der keinen Hamiltonschen Weg besitzt!

Zum Anderen kann man bei einem gerichteten Graph, der Verlierer und Gewinner ausweist, folgendes vermuten: Wenn Spieler A gegen Spieler B verliert und dieser wiederum gegen Spieler C verliert, so steht zu erwarten, das A erst recht gegen C verliert. Diese Eigenschaft nenen wir Transitivität des Graphen, und sie ist in Abbildung 4 dargestellt.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & C \end{tikzcd}$$

Abbildung 4

Wenn in einem gerichteten Graphen für alle Knoten A, B und C gilt, dass

immer wenn von A ein Pfeil nach B führt
und wenn von B ein Pfeil zu C führt,
dann führt auch von A ein Pfeil zu C,

dann heißt der gerichtete Graph *transitiv*.

Aufgabe 6: Ist Schere-Stein-Papier ein transitives Spiel? Erkläre deine Antwort!

Aufgabe 7: Drei Wettbewerbsrichter ordnen drei Athleten A, B und C auf der Grundlage ihrer subjektiven Wahrnehmungen in Ranglisten ein. Wenn am Ende ein Athlet in mindestens 2 der drei Ranglisten hinter einem anderen Athleten steht, dann gilt der erste als Verlierer und der andere als Gewinner. Kann man sich Ranglisten vorstellen, die dazu führen, dass A gegen B und B gegen C verlieren, aber auch C gegen A verliert?

2 Lateinische Quadrate

Die folgende Aufgabe könnte aus einem Rätselheft stammen:

Aufgabe 8: Fülle in dem folgenden Gitter die freien Felder so aus, dass in jeder (waagerechten) Zeile und jeder (senkrechten) Spalte die Zahlen von 1 bis 5 auftreten!.

1	3			5
		5		
	1		3	
				1
4			2	

Immer, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte die Zahlen $1, \ldots, n$ jeweils genau einmal vorkommen, dann sprechen wir bei einem solchen Gitter von einem *Lateinischen Quadrat* der Dimension n. Natürlich kann am alternativ auch mit den Zahlen $0, \ldots, n-1$ arbeiten.

Aufgabe 9: Entwerfe ein Lateinisches Quadrat der Dimension 6.

Wir können nun zwei Lateinische Quadrate miteinander verknüpfen und hoffen, so weitere interessante Quadrate zu erhalten. Um eine Möglichkeit besser zu erklären, haben wir das zweite Lateinische Quadrat mit Buchstaben statt mit Zahlen befüllt. Hier kommt nun in jeder Reihe und jeder Spalte kein Buchstabe doppelt vor.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

und

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

$\rightarrow$

$A1$	$B2$	$C3$	$D4$
$C4$	$D3$	$A2$	$B1$
$D2$	$C1$	$B4$	$A3$
$B3$	$A4$	$D1$	$C2$

Wir nennen dieses Vorgehen die *Überlagerung* oder *Superposition* von Lateinischen Quadraten. Die eben gezeigte Superposition hat die besondere Eigenschaft, dass jede Kombination eines Buchstaben mit einer Zahl in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt.

Aufgabe 10: Zeige, dass das nicht stets der Fall ist: es kann also sein, dass man zwei Lateinische Quadrate überlagert, ohne dass in der Superposition jede Buchstaben-Zahl-Kombination einmal vorkommt.

Immer, wenn bei der Überlagerung zweier Lateinischer Quadrate alle Kombinationen in der Superposition vorkommen, dann nennt man die beiden Quadrate *orthogonal* zueinander, und die Superposition heißt dann ein *Eulerquadrat.*

Immer, wenn die Dimenson eine Primzahl p ist, dann können wir $p-1$ paarweise orthogonale Lateinsche Quadrate finden. Mit paarweise orthogonal ist gemeint, dass je zwei Lateinische Quadrate unter den gefundenen $p-1$ Quadraten zueinander orthogonal sind. Der folgende Algorithmus konstruiert eine solche Menge von Lateinischen Quadraten. Zuerst nummeriert man sowohl die Zeilen als auch die Spalten mit den Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ durch. Für das erste Lateinische Quadrat trägt man in das Feld mit der Zeilennumer a und der Spaltennummer b den Wert von $1 \cdot a + b$ ein. Beim zweiten Lateinische Quadrat benutzt man statt der 1 in der Formel die Zahl 2, im dritten Quadrat durch die 3 – und fährt so fort, bis man $p-1$ Quadrate berechnet hat. Nun muss jeder Eintrag zwischen 0 und $p-1$ liegen. Immer, wenn unsere Rechnung ein Ergebnis liefert, das zu groß ist, dann subtrahieren wir von ihm so oft die Zahl p, bis die Differenz zwischen 0 und $p-1$ liegt. Wenn zum Beispiel $p = 5$ ist und eine Rechnung liefert erst einmal das Ergebnis 17, dann tragen wir in das Quadrat den Wert $2 = 17 - 5 - 5 - 5$ ein.

Aufgabe 11: Führe den Algorithmus für $p = 3$ durch.

Wir können Eulerquadrate für Turnierplanungen nutzen. Stelle dir vor, dass wir zwei Teams mit je vier Schachspielern vor uns haben, wobei wir die Spieler des einen Teams mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnen und die des anderen mit A, B, C, D. Daraus bauen wir nun ein Eulerquadrat. Man kann die Zeilen als Turnierrunden betrachten - und in jeder Runde kommt dann jeder Spieler genau einmal zum Einsatz. Wenn die Spiele einer Runde zu verschiedenen Zeitpunkten stattfinden sollen, dann könnten wir die Spalten etwa als Zuordnung zu den Spielzeiten - morgens, mittags, nachmittags und abends - interpretieren. Jeder Spieler kommt ja in jeder Spalte genau einmal vor, muss also einmal zu jeder der vier verschiedenen Zeiten spielen, sodass niemand benachteiligt ist. Alles in allem hat also nach den vier Runden jeder Spieler des einen Teams gegen jeden des anderen Teams gespielt. Im folgenden Quadrat wird zum Beispiel deutlich, dass in der vierten Runde nachmittags Spieler D gegen Spieler 1 antritt.

	Morgen	Mittag	Nachmittag	Abend
Erste Runde	$A1$	$B2$	$C3$	$D4$
Zweite Runde	$C4$	$D3$	$A2$	$B1$
Dritte Runde	$D2$	$C1$	$B4$	$A3$
Vierte Runde	$B3$	$A4$	$D1$	$C2$

3 Wahrscheinlichkeitsbäume

Wir nehmen einmal an, dass zwei Schachspieler A und B drei Mal gegeneinander antreten. Es soll mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% geschehen, dass A gewinnt, in 10% der Fälle kommt es zum Remis (=Unentschieden) und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% gewinnt dann B. Diese Situation kann man in einem *Wahrscheinlichkeitsbaum* darstellen; siehe Abbildung 5. Die verschiedenen Möglichkeiten der ersten Runde werden links dargestellt und die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten werden eingetragen. Deren Summe beträgt natürlich 1 oder 100%. In der zweiten Runde ist es - unabhängig vom Ausgang der ersten - wieder möglich, dass A gewinnt, Remis spielt oder verliert. Die Wahrscheinlichkeit, dass A sowohl aus der ersten als auch aus der zweiten Runde als Sieger hervorgeht, berechnet sich zu $0.6 \cdot 0.6 = 0.36$, also als Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten entlang der obersten Äste des Wahrscheinlichkeitsbaumes. Allgemeiner erfordert ein **und** (Spieler A gewinnt die erste Runde **und** die zweite Runde) stets die **Multiplikation** der einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

Nun betrachten wir die Situation, in der Spieler A und Spieler B jeweils ein Spiel gewinnen. Das ist dann der Fall, wenn A die erste Runde gewinnt und B die zweite Runde oder wenn B die erste Runde gewinnt und A die zweite. Angesichts unserer vorhergehenden Überlegungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass A die erste Runde gewinnt und B die zweite, als Produkt berechenbar und beträgt $0,6 \cdot 0,3 = 0,18$. Die andere Möglichkeit (B gewinnt die erste Runde und A die zweite) tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ auf. Diese beiden Fälle werden sprachlich mit einem **entweder - oder** verbunden. Dem entspricht die **Addition** der Einzelwahrscheinlichkeiten. Wir erhalten also das Resultat $0,36$ (nur zufällig das Gleiche wie bei der ersten Überlegung). Wichtig ist, dass durch entweder-oder zwei Möglichkeiten verknüpft werden, die nicht gleichzeitig auftreten können.

Aufgabe 12: Es gibt neun Möglichkeiten für den Ausgang der ersten beiden Spiele. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jede dieser Möglichkeiten und überzeuge dich, dass ihre Summe 1 beträgt!

Aufgabe 13: Bestimme die Wahrscheinlichkeiten aller Verläufe, in denen A das letzte Spiel der drei Spiele gewinnt. Wir groß ist die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 14: Wenn Spieler A und Spieler B fünf mal gegeneinander antreten, dann kann es sein, dass A vier Spiele gewinnt und B nur eines. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

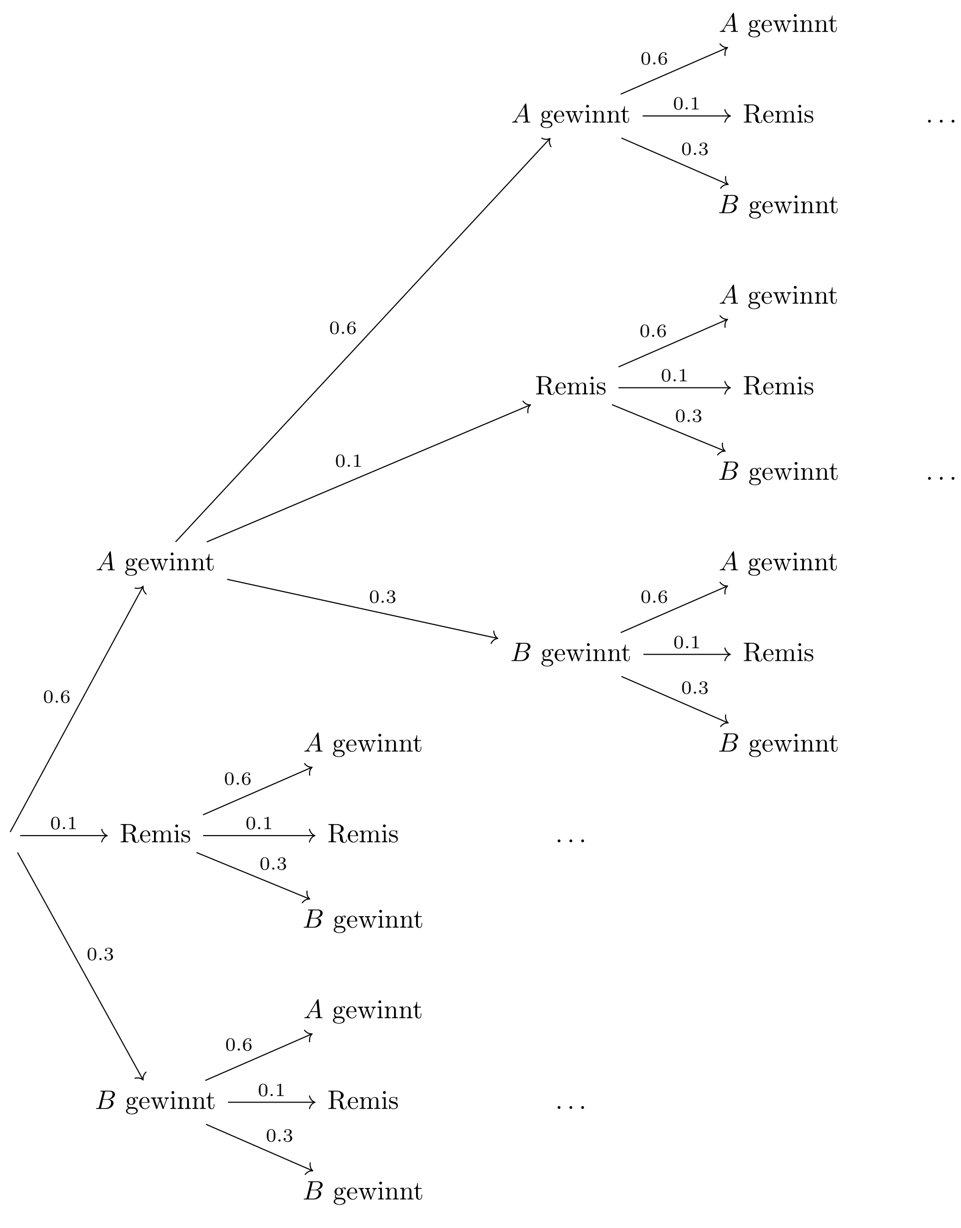


Abbildung 5

4 Kombinationen

Die letzte Aufgabe des vorangegangenen Kapitels zwingt uns dazu, über die Anzahl der Möglichkeiten von verschiedenen Reihenfolgen nachzudenken. Der erste mögliche Spielverlauf könnte daraus bestehen, dass B das erste Spiel gewinnt und A alle anderen; bei einer zweiten Möglichkeit gewinnt B das zweite Spiel und A wieder alle anderen. Man sieht, dass es fünf Möglichkeiten gibt, in denen B genau ein Spiel gewinnt. Alle diese fünf Möglichkeiten haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, und anstatt diese zu addieren, kann man die Wahrscheinlichkeit der ersten Möglichkeit direkt mit 5 multiplizieren. Wenn es darum geht, dass zum Beispiel A drei Spiele gewinnt und B zwei, dann wird das Abzählen etwas mühsamer.

Angenommen, ein Schachklub hat für seine 20 Mitglieder ein Turnier organisiert. Wie viele mögliche Ranglisten der Teilnehmer sind dann denkbar? Wir wissen, dass genau einer der 20 Teilnehmer den ersten Platz besetzt. Für den zweiten Platz stehen dann noch 19 Kandidaten zur Verfügung, für den dritten Platz noch 18 mögliche Spieler. Das geht immer so weiter, und letztendlich sehen wir, das es $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ denkbare verschiedene Ranglisten gibt. Für diese Zahl führen wir zur Vereinfachung das Symbol “20!” (lies: “20 Fakultät”) ein.

Aufgabe 15: Wie viele Bestenlisten sind denkbar, in denen nur die 3 ersten Plätze aufgeführt sind ?

Beim Lösen dieser Aufgabe hast du sicherlich argumentiert, dass es 20 mögliche Kandidaten für den ersten, 19 für den zweiten und 18 für den dritten Platz gibt; das Produkt dieser Zahlen ergibt dann die Anzahl der möglichen Bestenlisten. Das Resultat können wir auch in folgender Form notieren: $20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \cdots \cdot 1}{17 \cdot \cdots \cdot 1} = \frac{20!}{17!}$, und diesen Term kann man wiederum interpretieren. Wir zählen zuerst alle möglichen Ranglisten: das sind bekanntlich 20!. Das dividieren wir durch die Anzahl aller Ranglisten, in denen die ersten drei Plätze fest besetzt sind. Diese Anzahl beträgt 17!, denn sobald die ersten drei Plätze einmal belegt sind, bleiben 17 Spieler übrig, die die letzten 17 Plätze der Rangliste einnehmen sollen.

Eine Auswahl von 3 Spielern aus 20, wobei deren Reihenfolge eine Rolle spielt, nennt man eine *Permutation* von 3 aus 20. Die Anzahl dieser Permutationen bezeichnen wir mit P_{20}^3, und wir haben eben herausgefunden, dass $P_{20}^3 = \frac{20!}{17!}$. Allgemeiner notieren wir die Anzahl der Permutationen von k Elementen aus n als P_n^k , und wir haben die folgende Formel gefunden:

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Es ist wichtig, dass in unserem Beispiel die Reihenfolge der ersten drei Plätze von Bedeutung war; wenn man die Reihenfolge der Namen auf der Bestenliste vertauscht, dann ergibt das eben eine andere Platzierung. Andererseits könnte der Klub das Turnier auch nutzen, um drei Spieler herauszufinden, die den Verein bei einem nationalen Schachturnier vertreten. In der Namensliste der drei ausgewählten Spieler würde die Reihenfolge der Namen dann keine Rolle spielen. Eine Auswahl von 3 Spielern aus 20, in der die Reihenfolge keine Rolle spielt, nennen wir eine *Kombination* von 3 aus 20, und wir bezeichnen die Anzahl dieser Kombinationen mit dem Symbol C_{20}^3. Um diese Zahl zu berechnen, dividieren wir die Anzahl der Permutationen von 3 aus 20 durch die Anzahl der möglichen Reihenfolgen, in der die drei besten Spieler die drei ersten Plätze besetzen können, also durch 3!. Also ist $C_{20}^3 = \frac{1}{3!} P_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!}$. Allgemein berechnet sich die Anzahl der Kombinationen von k Elementen aus n stets durch

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Aufgabe 16: Vater und Sohn spielen beide Schach und nehmen beide an einem Turnier ihres Vereins teil. Die besten drei Spieler bekommen als Preis eine Flasche Wein, die nächsten 10 einen Gutschein. Insgesamt nehmen 50 Teilnehmer an dem Turnier teil. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie sowohl eine Flasche Wein als auch einen Gutschein gewinnt! Dabei nehmen wir an, dass sowohl für Vater und Sohn die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Platz der Rangliste zu erzielen, stets $\frac{1}{50}$ beträgt; die Rangliste entsteht also völlig willkürlich. (Das könnte zum Beispiel dadurch kommen, dass alle Spieler am Turniertag genau gleich stark sind.)

Aufgabe 17: Du würfelst 3 mal hintereinander. Durch wie viele Möglichkeiten entsteht dabei die Augensumme 6?

Aufgabe 18: Man würfelt 10 mal hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau 3 mal eine 5 würfelt?

5 Geometrische Folgen

Wir betrachten eine Folge von Zahlen:

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots .$$

Diese können wir auch niederschreiben als

$$3 \cdot 2^0, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4, \ldots .$$

Dies ein Beispiel für eine *geometrische Folge* bei der, mit Ausnahme des ersten Gliedes, jedes Folgenglied aus dem vorhergehenden durch Muliplikation mit einer Konstanten hervorgeht. Diese Konstante nennt man den *Wachstumsfaktor* oder kurz Faktor der geometrischen Folge [2]. Die Folge aus dem Beispiel hat also den Wachstumsfaktor 2. Allgemein hat eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied a und dem Wachstumsfaktor r also die Gestalt

$$a, ar, ar^2, \ldots .$$

Das n-te Glied der Folge berechnet sich zu

$$t_n = ar^{n-1}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die Summe „aller“ Glieder einer geometrischen Folge einen endlichen Wert besitzt, wenn $|r| < 1$ ist (und natürlich auch, wenn $a = 0$ ist). Man kann den Wert dieser unendlich langen Summe sogar angeben; er beträgt

$$s = \frac{a}{1-r}.$$

Aufgabe 19: Wie lauten das Anfangsglied, der Faktor und die Summe aller Glieder der geometrischen Folge $200, 80, \ldots$?

[2] Wenn die Konstante kleiner als 1 ist, dann widerspricht die Bezeichnung Wachstumsfaktor der Intuition, wird aber trotzdem verwendet.

6 Anhang 1: Das Punktesystem beim Tennis

In einem Tennisspiel gewinnt man Punkte, wenn zum Beispiel der Gegenspieler den Ball ins Netz oder so schlägt, dass er auf den Boden außerhalb des Spielfeldes aufschlägt. Die Punkte werden auf eine besondere Art und Weise gezählt. Sie werden nämlich nicht einfach addiert, sondern man nennt den ersten Punkt 15, den zweiten 30 und den dritten 40. Wenn ein Spieler dann noch einen Punkt erzielt, ohne dass sein Gegenspieler schon den Spielstand 40 erreicht hätte, gewinnt er das **Spiel**. Zum Beispiel bedeutet der Spielstand 30-15 also, dass der erste Spieler 2 Punkte und sein Gegner nur einen Punkt erreicht hat. Der Spielstand 40-40 wird *deuce* genannt. In diesem Fall muss man unmittelbar nacheinander zwei Punkte erspielen, um das Spiel zu gewinnen. Der erste wird dann *advantage* oder *Vorteil* genannt. Wenn der nächste Punkt dann aber von der Gegenpartei gemacht wird, wird der Spielstand wieder auf 40-40 zurückgesetzt. Ein solches Spiel kann also theoretisch unendlich lange dauern.

Wenn man genügend viele Spiele gewinnt, kann man einen **Satz** für sich verbuchen. Im Allgemeinen muss man 6 Spiele gewinnen, um den Satz zu gewinnen. Die einzige Ausnahme ist die, dass man bei einem Spielstand von 6-5 (gezählt sind hier die gewonnenen Spiele) auskommt. In diesem Fall wird noch ein Spiel gespielt. Bei einem Stand von 7-5 ist der Satz zu Ende und sein Sieger steht fest; bei 6-6 wird ein *Tiebreak* gespielt. Darin gewinnt derjenige, der als erster 7 Punkte und dabei mindestens 2 Punkte Unterschied zum Gegner erspielt. Der Gewinner des Tiebreak ist immer auch der Gewinner des Satzes.

Am Ende gewinnt man ein **Match**, indem man als erster Spieler zwei Sätze für sich entscheidet.

Eine Merkwürdigkeit bei diesen Regeln ist, das man als Sieger aus einem Match hervorgehen kann, in dem man weniger Punkte erzielt hat als sein Gegner.

Aufgabe 20: Entwirf einen Spielverlauf, bei dem der Sieger weniger Punkte erzielt als der gegnerische Verlierer!

7 Anhang 2: Das Elo-Rating

Beim Schach und auch anderen Sportarten wird vom *Elo-Rating* Gebrauch gemacht, das nach dem amerikanischen Naturwissenschaftler und Schachspieler *Arpad Elo* benannt wurde. Jedem Spieler wird eine Zahl zugeordnet, die eine Idee davon vermitteln soll, wie stark der Spieler ist. Eine höhere Zahl deutet auf einen stärkeren Spieler hin. Es ist durchaus möglich, dass zwei Spieler das gleiche Elo-Rating besitzen.

Die Zuordnung von Ratings zu den Spielern basiert auf einer mathematisch raffinierten Idee. Wenn jemand mit dem Schachspiel in Turnieren beginnt, wird ihr/ihm erst einmal eine zufällige Zahl zugeordnet. Nach jedem Spiel wird das Elo-Rating des Spielers neu ermittelt. Dazu betrachtet man jedes Spiel als ein Zufallsexperiment. Wir werden hier **den Fall des Remis nicht mit betrachten** : Jedes Spiel gewinnt man oder verliert es. Wenn nun zwei Spieler der gleichen Stärke gegeneinander antreten, dann haben beide die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit: wenn sie sehr oft gegeneinander spielen, wird etwa die Hälfte der Spiele vom einen Spieler, die andere Hälfte von dem anderen Spieler gewonnen werden. Wenn ein starker Spieler gegen einen schwachen spielt, dann hat er eine große Gewinnwahrscheinlichkeit; es kann aber auch geschehen, dass er verliert. Das Elo-Rating wird mehr oder weniger daran angepasst, wie überraschend das Spielergebnis ist - oder anders gesagt, wie hoch der Informationsgehalt des Spiels ist. Wenn ein starker Spieler gegen einen schwachen gewinnt, dann ist das wenig überraschend und das Elo-Rating wird sich nicht sehr verändern. Wenn aber der starke Spieler verliert, dann wird sein Elo-Rating stark absinken, und das des schwächeren wird stark ansteigen.

Anmerkung: Das Elo-Rating eines Schachspielers ist nicht das Gleiche wie die „echte Spielstärke“ des Spielers, aber nach jedem Spiel versucht man, das Elo-Rating der echten Stärke anzupassen. Das Elo-Rating ist also ein mathematisches Modell, das Spiel für Spiel versucht, sich der Realität anzunähern.

Wie wird diese Idee nun mathematisch umgesetzt? Wir bezeichnen das Elo-Rating eines Spielers A mit R_A und das eines Spielers B mit R_B. Weiter nehmen wir an, dass diese Zahlen so gewählt sind, dass die Wahrscheinlichkeit, dass A gegen B gewinnt, durch die Formel

$$P(A \text{ gewinnt gegen } B) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}}.$$

gegeben ist. Diese Formel und die Zahlen 10 und 400, die darin vorkommen, sind mit Bedacht gewählt. Die Formel hat nämlich einige notwendige Eigenschaften - wie zum Beispiel die folgenden:

Aufgabe 21: Weil wir das Remis ausgeschlossen haben, muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten, das A gegen B gewinnt und dass B gegen A gewinnt, gleich 1 sein. Zeige, dass die obige Formel dieser Erwartung standhält!

Eine andere gute Eigenschaft der Formel ist, dass immer, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass A mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ gegen B gewinnt, aus der Formel folgt, dass $R_A = R_B$ sein muss. Die Gewinnwahrscheinlichkeit $1/2$ spricht ja intuitiv auch dafür, dass die beiden Spieler gleich stark sind.

Nun stellt sich noch die Frage, wie die Elo-Ratings angepasst werden, nachdem das Resultat eines Spiels von A gegen B vorliegt. Mit R_A und R_B bezeichnen wir die Elo-Ratings von A und B vor dem Spiel, und mit S_A und S_B ihre Spielergebnisse: wenn A gewinnt, soll $S_A = 1$ und $S_B = 0$ sein, und wenn B gewinnt, ist entsprechend $S_A = 0$ und $S_B = 1$. Wir benutzen die folgenden Formeln um die neuen Elo-Ratings der Spieler, R'_A und R'_B, zu bestimmen::

$$
\begin{aligned}
R'_A &= R_A + K \cdot (S_A - P(A \text{ gewinnt gegen } B))\,, \\
R'_B &= R_B + K \cdot (S_B - P(B \text{ gewinnt gegen } A))\,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist K eine echt positve Zahl; in der Praxis benutzt man oft $K = 40$. In der Praxis wird das neue Elo-Rating auch auf die nächstliegende natürliche Zahl gerundet. Um die Formeln einfach zu halten, **verzichten wir hier auf das Runden**: so kann das Elo-Rating bei uns auch eine Kommazahl sein. Die Formeln kann man einfach interpretieren. Wir schauen uns beispielsweile die erste Formel für den Fall an, dass A ursprünglich eine höheres Elo-Rating hatte als Spieler B und dass A auch wirklich das Spiel gewinnt. In diesem Falle ist

$$
S_A - P(A \text{ gewinnt gegen } B) = 1 - P(A \text{ gewinnt gegen } B) = P(B \text{ gewinnt gegen } A)
$$

eine Zahl zwischen 0 und 1. Je größer die Differenz $R_A - R_B$ ist, desto kleiner ist dieser Wert und desto weniger wird das Rating von A also durch das Ergebnis des Spiels steigen. Genau das wollen wir ja: je größer der Unterschied $R_A - R_B$ ist, desto weniger überraschend ist der Ausgang des Spiels ja gewesen.

Aufgabe 22: Beweise, dass das Elo-Rating des Gewinners eines Spiels um den gleichen Betrag steigt, um den das Elo-Rating des Verlierers des gleichen Spiels sinkt.

Aufgabe 23: Drei Spieler, A, B und C, absolvieren ein Schachturnier. Ihre Elo-Ratings vor dem Turnier sind in dieser Reihenfolge 1100, 1800 und 2500. Das Turnier läuft wir folgt ab: A spielt gegen B und gewinnt, danach spielt B gegen C und B ist bei diesem Spiel siegreich. Zum Schluss spielt C gegen A und A gewinnt. Berechne die Elo-Ratings aller Spieler nach jedem der drei Spiele!

Lösungen der Aufgaben

1. Zum Beispiel löst die Aufgabe der folgende Graph:

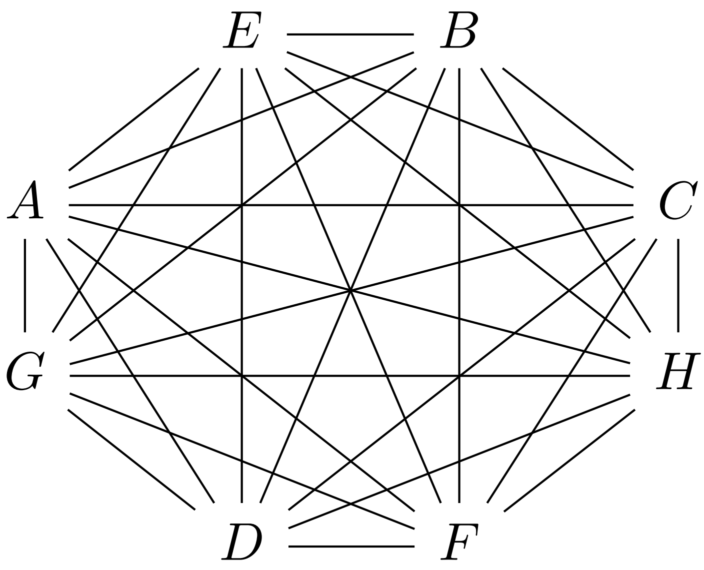


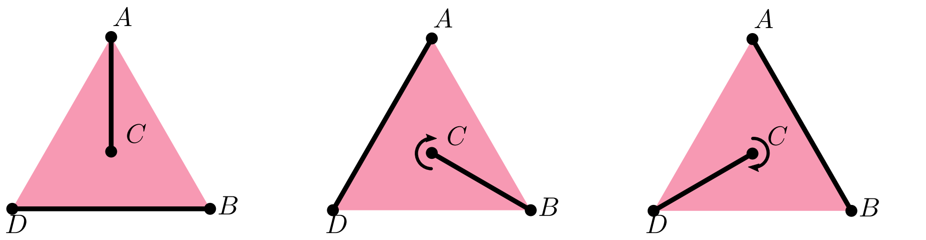
Abbildung 6

2. a. Zuerst einmal stellen wir fest, dass nach unserer Konstruktion kein Spieler gegen sich selbst spielen muss. Zweitens hat jeder Spieler bei jeder Runde einen anderen Gegner. Wir müssen herausfinden, woher wir wissen, dass bei jeder Rotation jeder Eckpunkt mit einem neuen Eckpunkt verbunden wird. In der Ausgangsfigur, also für die erste Runde, haben wir $n/2$ verschiedene Strecken gezeichnet. Das ist nur deswegen möglich, weil n eine gerade Zahl ist - sei es, weil wirklich eine gerade Anzahl von Spielern antritt oder sei es, weil wir einen Dummy-Spieler eingeführt haben. Für die k-te Runde haben wir diese Strecken um den Winkel $k \cdot \frac{360°}{n-1}$ im Uhrzeigersinn weitergedreht. Das ergibt natürlich wieder $n/2$ neue verschiedene Strecken, denn

   - wenn man zwei verschiedene Strecken beide um den gleichen Winkel dreht, dann sind auch die gedrehten Strecken verschieden
   - keine der gedrehten Strecken kann mit der ursprünglichen Strecke übereinstimmen. Das wäre nur möglich, wenn der Drehwinkel 180° betrüge. Unser Drehwinkel beträgt $k \cdot \frac{360°}{n-1}$, und das ergibt niemals 180°. Wäre $k \cdot \frac{360°}{n-1} = 180°$, dann folgte daraus $n-1 = 2k$ und damit, dass $n-1$ eine gerade wäre. Aber $n-1$ muss ja ungerade sein.

   b. In der ersten Runde ist jeder Eckpunkt und auch der Zentralpunkt ein Endpunkt genau einer Verbindungskante. Das bleibt bei jeder Drehung so. Das bedeutet genau, dass jeder Spieler in jeder Runde nur ein Spiel absolvieren muss.

3. Betrachte die Abbildung 7. Die Spieler, die gegeneinander antreten, stehen unter jedem Dreieck.



(a) Runde 1: A spielt gegen C, D gegen B.

(b) Runde 2: A spielt gegen D, B gegen C.

(c) Ronde 3: A spielt gegen B, C gegen D

Abbildung 7

4. $ABC, ABBC, AGDC, AGFDC$

5. Wir zeichnen in Abbildung 8 einen ungerichteten Graphen, der keinen Hamiltonschen Weg besitzt. Wenn man die Kanten noch mit Richtungen versieht, dann ist das auch ein Beispiel für einen gerichteten Graphen ohne Hamiltonschen Weg,

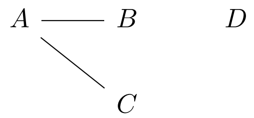


Abbildung 8

6. Nein: Papier gewinnt zum Beispiel gegen den Stein und Stein gegen Schere, aber Papier verliert gegen Schere.

7. Ein Beispiel: der erste Kampfrichter bringt die Sportler in die Reihenfolge (vom Besten zum Schlechtesten): $B - A - C$, der zweite urteilt $C - B - A$ und der dritte $A - C - B$.

8.

1	3	2	4	5
3	2	5	1	4
5	1	4	3	2
2	4	3	5	1
4	5	1	2	3

9. Zum Beispiel:

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

10.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

und

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

$\rightarrow$

$A1$	$B2$	$C3$	$D4$
$D4$	$C3$	$B2$	$A1$
$B2$	$A1$	$D4$	$C3$
$C3$	$D4$	$A1$	$B2$

11.

0	1	2
1	2	0
2	0	1

und

0	1	2
2	0	1
1	2	0

12.

Gewinner 1. Runde	Gewinner 2. Runde	Wahrscheinlichkeit
A	A	$0.6 \cdot 0.6$
A	R	$0.6 \cdot 0.1$
A	B	$0.6 \cdot 0.3$
R	A	$0.1 \cdot 0.6$
R	R	$0.1 \cdot 0.1$
R	B	$0.1 \cdot 0.3$
B	A	$0.3 \cdot 0.6$
B	R	$0.3 \cdot 0.1$
B	B	$0.3 \cdot 0.3$

Addiert man diese Wahrscheinlichkeiten, so erhält man die Summe 1.

13.

Gewinner 1. Runde	Gewinner 1. Runde	Gewinner 3. Runde	Wahrscheinlichkeit
A	A	A	$0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6$
A	R	A	$0.6 \cdot 0.1 \cdot 0.6$
A	B	A	$0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.6$
R	A	A	$0.1 \cdot 0.6 \cdot 0.6$
R	R	A	$0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.6$
R	B	A	$0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.6$
B	A	A	$0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6$
B	R	A	$0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.6$
B	B	A	$0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.6$

Aus der vorangehenden Übung folgt, dass die Wahrscheinlichkeit $1 \cdot 0.6 = 0.6$ beträgt. Das ist eigentlich keine Überraschung: so hoch ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass A die dritte (oder irgendeine andere) Runde gewinnt.

14. Spieler B könnte nur die erste Runde gewinnen oder nur die zweite ..., und immer geschieht das mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $0.6^4 \cdot 0.3$. Wir erhalten also $5 \cdot 0.6^4 \cdot 0.3 = 19.44\%$.

15. $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$

16. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass der Vater unter den drei Besten landet und der Sohn einen der Plätze 4 bis 10 belegt - oder umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Vater unter den drei Besten ist, beträgt $\frac{3}{50}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass der Sohn einen der Plätze 4 bis 10 erreicht, ist $\frac{7}{50}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich also zu $2 \cdot \frac{3}{50} \cdot \frac{7}{50} = 1,68\%$.

17. Eine erste Möglichkeit besteht daran, dass man die Zahlen $2, 2, 2$ würfelt, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ geschieht. Weiter könnte man

die Zahlen $1, 2, 3$ in irgendeiner Reihenfolge würfeln. In jeder der $3! = 6$ Permutationen ist die Wahrscheinlichkeit gleich; so entsteht die Wahrscheinlichkeit $6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Schließlich könnte man die Zahlen $1, 1, 4$ in 3 möglichen Reihenfolgen würfeln, und darum beträgt die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Die Addition dieser Wahrscheinlichkeiten liefert das gesuchte Ergebnis 4.63%.

18. Die Anzahl möglicher Anordnungen, in denen 3 Mal „fünf“ und 7 Mal „nicht fünf“ vorkommt, beträgt $C_{10}^{3} = 120$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $120 \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^7 = 15.50\%$.

19. Das Anfangsglied ist 200, der Wachstumsfaktor ist $\frac{2}{5}$ und die unendliche Summe hat den Wert $\frac{1000}{3}$.

20. Wir stellen uns zum Beispiel vor, dass der erste Spieler A die ersten vier Spiele gewinnt, ohne dass der zweite Spieler B einen Punkt gewinnt. Der Spielstand (in gewonnenen Spielen) ist dann 4-0, A hat 16 Punkte gemacht und B leider 0 Punkte. Nun folgen 6 Spiele, wobei stets zunächst der Stand 30-30 erreicht wird und dann B 2 Punkte erzielt und damit das Spiel gewinnt. Der Stand (wieder in gewonnenen Spielen) ist dann 4-6 und der der zweite Spieler B gewinnt den Satz. Alles in Allem hat A 28 Punkte erzielt und B nur 24. Wenn nun der zweite Satz genauso verläuft, dann hat B das Match mit 48 Punkten gewonnen, während der Verlierer A 56 Punkte erreicht hat.

21. Man rechnet leicht nach, dass $\frac{1}{1+10^{\frac{R_B-R_A}{400}}} + \frac{1}{1+10^{\frac{R_A-R_B}{400}}} = 1$.

22. Wir müssen beweisen, dass

$$K \cdot (S_A - P(A \text{ gewinnt gegen } B)) = -K \cdot (S_B - P(B \text{ gewinnt gegen } A)),$$

gilt. Das ist äquivalent zu

$$P(A \text{ gewinnt gegen } B) + P(B \text{ gewinnt gegen } A) = S_A + S_B.$$

Beide Seiten der letzten Gleichung haben offenbar den Wert 1, was die Behauptung beweist.

23. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse mit Werten auf drei gültige Dezimalstellen genau berechnet:

	Start	A gewinnt gegen B	B gewinnt gegen C	A gewinnt gegen C
R_A	1100	1139.30	1139.30	1179.28
R_B	1800	1760.70	1800.14	1800.14
R_C	2500	2500	2460.56	2420.58