Lösungen des „ Sum of Us“-Wettbewerbs

Aufgabe 1: Max-Min-Struktur (58 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es vor allem darum, durch Ankreuzen zu entscheiden, ob eine Aussage stimmt oder nicht. Dabei gibt es in 1.1 für jedes richtige Kreuz vier Punkte und in 1.2 zwei Punkte. Um zufälligem Ankreuzen vorzubeugen, wird bei falschen Kreuzen die entsprechende Anzahl an Punkten abgezogen. Es kann also sinvoll sein, kein Kreuz zu setzen, wenn ihr euch nicht sicher seid, ob die Aussage stimmt oder nicht. Insgesamt können für Aufgabe 1 nicht weniger als null Punkte erzielt werden. Punkte können in dieser Aufgabe nur dann vergeben werden, wenn klar zu erkennen ist, welche der beiden Aussagen angekreuzt wurde.

1.1 Entscheidet, ob die folgenden Aussagen für beliebige reelle Zahlen a, b, c und eine beliebige natürliche Zahl n wahr oder falsch sind. (36 Punkte)

Nr.	**Aussage**	**Ja**	**Nein**
1	$-\min\{a, b\} = \max\{-a, -b\}$	×	
2	$-\max\{a, b\} = -\min\{-a, -b\}$		×
3	$\min\{a, b\} = -\max\{a, b\}$		×
4	$\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$	×	
5	$\min\{\max\{a, b\}, c\} = \min\{a, \max\{b, c\}\}$		×
6	$\max\{c, \min\{a, b\}\} = \min\{\max\{c, a\}, \max\{c, b\}\}$	×	
7	$(a + b)^n = a^n + b^n$		×
8	$(a \oplus b)^{\odot n} = a^{\odot n} \oplus b^{\odot n}$	×	
9	$a^{\odot n} \odot a^{\odot m} = a^{\odot(n \oplus m)}$		×

1.2 Eigenschaften einer Max-Min-Struktur (22 Punkte)

Wir definieren die Max-Min-Struktur über $\mathbb{R}_{max,min} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ für Zahlen x, y aus $\mathbb{R}_{max,min}$ durch

$$x \otimes y = \max\{x, y\} \qquad x \circledast y = \min\{x, y\}.$$

Prüft die folgenden Eigenschaften der Max-Min-Struktur und füllt die entsprechenden Lücken. Dabei sind alle im Folgenden auftretenden Variablen a, b und c beliebige Elemente aus der Menge $\mathbb{R}_{max,min}$.

Rechengesetze der Max-Min-Struktur (12 Punkte)

Nr.	Rechengesetz		Ja	Nein
10	Kommutativität von $\otimes$	Gilt $a \otimes b = b \otimes a$?	×	
11	Kommutativität von $\circledast$	Gilt $a \circledast b = b \circledast a$?	×	
12	Assoziativität von $\otimes$	Gilt $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$?	×	
13	Assoziativität von $\circledast$	Gilt $(a \circledast b) \circledast c = a \circledast (b \circledast c)$?	×	
14	1. Distributivgesetz	Gilt $a \otimes (b \circledast c) = (a \otimes b) \circledast (a \otimes c)$?	×	
15	2. Distributivgesetz	Gilt $a \circledast (b \otimes c) = (a \circledast b) \otimes (a \circledast c)$?	×	

Neutrale Elemente (6 Punkte)

Nr.	Operation	Neutrales Element
16	Was ist das neutrale Element von $\otimes$?	ε :=-∞
17	Was ist das neutrale Element von $\circledast$?	$-\varepsilon = \infty$

Invertierbarkeit (4 Punkte)

Nr.	Operation	Ja	Nein
18	Ist $\otimes$ invertierbar?		×
19	Ist $\circledast$ invertierbar?		×

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme (42 Punkte)

Betrachtet die drei folgenden Gleichungssysteme und bestimmt, ob dieses keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Wenn es genau eine Lösung gibt, gebt diese in der Form $x_1 = \_$, $x_2 = \_$, $x_3 = \_$, $x_4 = \_$ an. Gibt es unendlich viele Lösungen, so gebt die Werte der Variablen an, die eindeutig bestimmt sind und die obere Schranke der Variable, für die es unendlich viele Möglichkeiten gibt. Gibt es keine Lösung, so lasst das Feld für die Lösung des Gleichungssystems leer.

(a)
$$\left|\begin{array}{ccccccccc} 6 \odot x_1 & \oplus & 7 \odot x_2 & \oplus & 8 \odot x_3 & \oplus & 5 \odot x_4 & = & 10 \\ 5 \odot x_1 & \oplus & 8 \odot x_2 & \oplus & 12 \odot x_3 & \oplus & 5 \odot x_4 & = & 12 \\ 3 \odot x_1 & \oplus & 3 \odot x_2 & \oplus & 8 \odot x_3 & \oplus & 7 \odot x_4 & = & 9 \\ 6 \odot x_1 & \oplus & 2 \odot x_2 & \oplus & 7 \odot x_3 & \oplus & -1 \odot x_4 & = & 7 \end{array}\right| .$$

keine Lösung	
genau eine Lösung	
unendlich viele Lösungen	×

Lösung des Gleichungssystems: $x_1 \leq 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

(b)
$$\left|\begin{array}{ccccccccc} 3 \odot x_1 & \oplus & 9 \odot x_2 & \oplus & 1 \odot x_3 & \oplus & 2 \odot x_4 & = & 8 \\ -1 \odot x_1 & \oplus & 0 \odot x_2 & \oplus & 1 \odot x_3 & \oplus & -3 \odot x_4 & = & 2 \\ -13 \odot x_1 & \oplus & -5 \odot x_2 & \oplus & -8 \odot x_3 & \oplus & -6 \odot x_4 & = & \text{-3} \\ -3 \odot x_1 & \oplus & -5 \odot x_2 & \oplus & 1 \odot x_3 & \oplus & -3 \odot x_4 & = & 1 \end{array}\right| .$$

keine Lösung	
genau eine Lösung	×
unendlich viele Lösungen	

Lösung des Gleichungssystems: $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

(c)
$$\left|\begin{array}{ccccccccc} 2 \odot x_1 & \oplus & 6 \odot x_2 & \oplus & 5 \odot x_3 & \oplus & 6 \odot x_4 & = & 8 \\ 8 \odot x_1 & \oplus & 10 \odot x_2 & \oplus & 5 \odot x_3 & \oplus & 16 \odot x_4 & = & 11 \\ -1 \odot x_1 & \oplus & 1 \odot x_2 & \oplus & 5 \odot x_3 & \oplus & 6 \odot x_4 & = & 6 \\ 5 \odot x_1 & \oplus & 11 \odot x_2 & \oplus & 5 \odot x_3 & \oplus & 10 \odot x_4 & = & 9 \end{array}\right| .$$

keine Lösung	×
genau eine Lösung	
unendlich viele Lösungen	

Lösung des Gleichungssystems:

Aufgabe 3: Containerverladung (150 Punkte)

In dieser Aufgabe wird ein fiktives Schifffahrtsnetz betrachtet. Dieses besteht aus Schiffen, die Container transportieren und zwei großen Häfen, Maximaros und Plusantis, an denen die Möglichkeit bestehen soll, Container von einem Schiff auf ein anderes Schiff umzuladen.

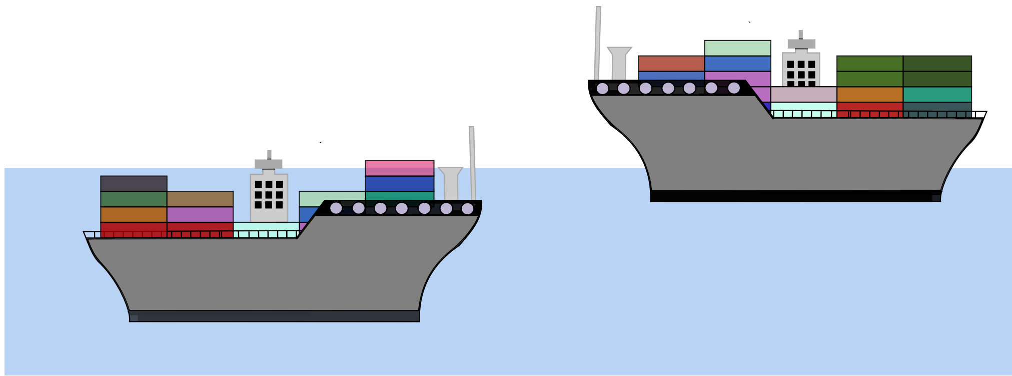
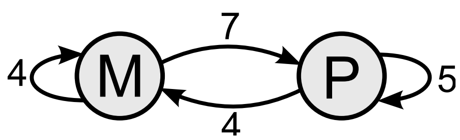


Abbildung 1: Die beiden Containerschiffe, die sich auf der Route zwischen den beiden Häfen befinden

Es sind vier Schiffe im Umlauf. Zwei Schiffe pendeln zwischen den beiden Häfen, wobei das eine Schiff von Maximaros und das andere Schiff von Plusantis startet. Aufgrund der Strömung beträgt die Fahrzeit Maximaros nach Plusantis sieben Stunden und von Plusantis nach Maximaros vier Stunden. Dabei ist die Zeit, die zum Umladen der Container benötigt wird, bereits jeweils mit eingerechnet. Von Maximaros startet ein weiteres Schiff, welches Container ausliefert und nach vier Stunden wieder abfahrbereit in Maximaros ist. Das vierte Schiff startet und endet in Plusantis. Für die gefahrene Route inklusive Umladezeit werden fünf Stunden benötigt. Damit die Möglichkeit besteht, Container von einem Schiff auf ein anderes umzuladen, erfolgen die Abfahrten in einem Hafen zeitgleich nachdem die längere Fahrzeit inklusive Umladezeit vergangen ist.

3.1 Zeichnet den Graphen, der das beschriebene Schifffahrtsnetz darstellt. Bezeichnet dabei Maximaros als M und Plusantis als P. (12 Punkte)



3.2 Stellt die zu dem Graphen gehörige Matrix A auf. M soll dabei in der ersten Zeile und Spalte stehen. P in der jeweils zweiten. (12 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

3.3 Welche regelmäßige Taktzeit kann im Optimalfall eingehalten werden? (6 Punkte)

Die Abfahrten können alle 5.5 Stunden erfolgen.

3.4 Auf welcher Strecke sollte ein weiteres Schiff eingesetzt werden, um häufigere Abfahrten zu ermöglichen? (6 Punkte)

Das Schiff sollte zwischen den beiden Häfen pendeln und von Maximaros nach Plusantis starten.

3.5 Stellt die Matrix B auf, welche eine virtuelle Station S für das zusätzliche Schiff enthält. Wählt dabei, sollte es mehrere Möglichkeiten geben, den ersten Abfahrtsort des zusätzlichen Schiffs so, dass zuerst die längere Fahrzeit angetreten wird. Ordnet die Matrix so an, dass in der ersten Zeile und Spalte M steht, in der zweiten P und in der dritten S. (18 Punkte)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 7 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

3.6 Gebt den Eigenwert λ von B an. (15 Punkte)

$\lambda = 5$

3.7 Bestimmt die normierte Matrix B_λ und die zugehörigen *Potenzen*. (18+9+9 = 36 Punkte)

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 2 \\ -5 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad B_\lambda^{\odot 2} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & -6 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad B_\lambda^{\odot 3} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

3.8 Bestimmt die Matrix B_λ^+. (18 Punkte)

$$B_\lambda^+ = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

3.9 Gebt einen Eigenvektor der Matrix B an. (9 Punkte)

Wahrscheinlich wird die Lösung $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ angegeben.

Es sind alle Vektoren der Form $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $y = x + 1$, $z = x - 5$, korrekt.

3.10 Wie müssen die Startzeiten für das Schifffahrtsnetz mit zusätzlichem Schiff gewählt werden, damit die Abfahrten an beiden Häfen regelmäßig erfolgen? Tragt für die Station, von der zuerst abgefahren wird, eine null ein und gebt die Stunden bis zu den ersten Abfahrten der anderen Stationen passend dazu an. (18 Punkte)

Station	**M**	**P**	**S**
Abfahrt nach ... Stunden	5	6	0

Aufgabe 4: Zugkopplung (147 Punkte)

Um Zugfahrten möglichst effizient zu gestalten, sollen Waggons eines Zuges nach Bedarf umgekoppelt werden, um auf anderen Strecken eingesetzt werden zu können. Auf der Zugstrecke von Köln nach Münster soll regelmäßig ein Zug fahren. Da auf dieser Strecke eine hohe Nachfrage besteht, wird hier ein sehr langer Zug eingesetzt. In Münster wird dieser zweigeteilt, sodass ein Teil des Zuges weiter nach Bielefeld und der andere Teil des Zuges nach Osnabrück fährt. Während der Zug in Bielefeld nach einem vorgeschriebenen Aufenthalt von 30 Minuten am Bahnhof direkt zurück nach Münster fährt, teilt sich der andere in Osnabrück erneut in zwei Teile. Die beiden Teilzüge fahren eine Rundstrecke, die hier als West- und Ostschleife bezeichnet werden und kommen anschließend beide wieder in Osnabrück an, wo sie wieder zu einem Zug gekoppelt werden und zurück nach Münster fahren. Hier wird der ursprünglich in Köln losgefahrene Zug wieder vollständig zusammengesetzt und fährt zurück zum Kölner Hauptbahnhof.

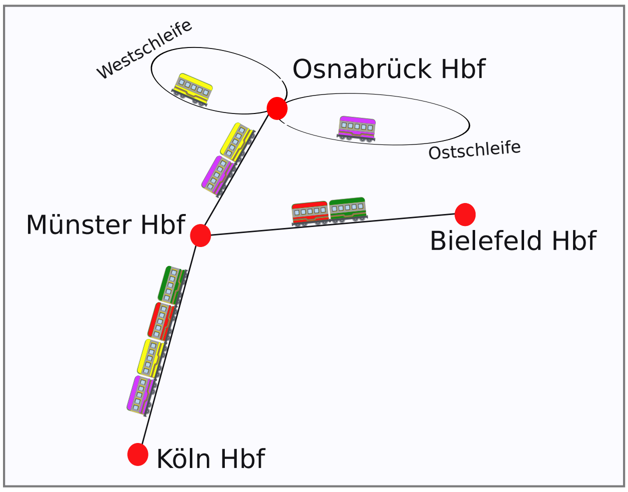
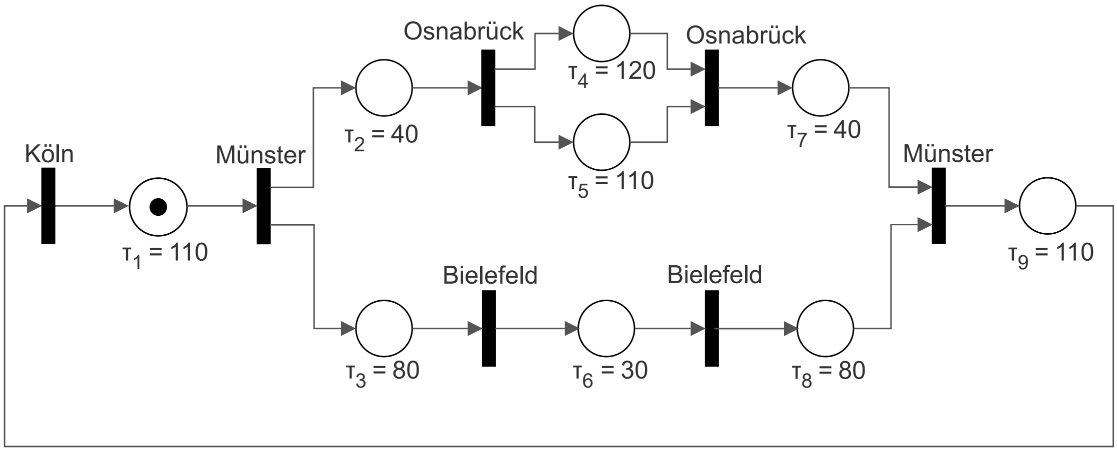


Abbildung 2: Karte der geplanten Kopplungsvorgänge

Die einzelnen Phasen und deren Verzögerungszeiten können aus der folgenden Tabelle entnommen werden. Die angegebene Reihenfolge der Phasen soll, um auf eine einheitliche Lösung zu kommen, bei der Bearbeitung der kommenden Aufgaben übernommen werden. Umsteigezeiten und sonstige Verzögerungen durch Trennen und Zusammenführen der Zugteile sind bereits in der Verzögerungszeit enthalten.

p_1	Der in Köln gestartete Zug ist auf dem Weg nach Münster.	$\tau_1 = 110$
p_2	Ein Zugteil ist auf dem Weg von Münster nach Osnabrück.	$\tau_2 = 40$
p_3	Ein Zugteil ist auf dem Weg von Münster nach Bielefeld.	$\tau_3 = 80$
p_4	Ein Zugteil fährt die Westschleife.	$\tau_4 = 120$
p_5	Ein Zugteil fährt die Ostschleife.	$\tau_5 = 110$
p_6	Ein Zugteil wartet in Bielefeld.	$\tau_6 = 30$
p_7	Ein Zugteil ist auf dem Weg von Osnabrück nach Münster.	$\tau_7 = 40$
p_8	Ein Zugteil ist auf dem Weg von Bielefeld nach Münster.	$\tau_8 = 80$
p_9	Der wieder gekoppelte Zug ist auf dem Weg von Münster nach Köln.	$\tau_9 = 110$

4.1 Stellt den vollständigen Synchronisationsgraphen auf, der die Zugfahrten und Kopplungen beschreibt. Beschriftet dabei die Verzögerungszeiten der Stellen und die Orte an denen die Transitionen stattfinden und markiert die Stelle der zuerst einsetzenden Phase. (54 Punkte)



4.2 Stellt die zum Synchronisationsgraphen gehörige Matrix A auf, sodass $A \odot x(k) = x(k+1)$ gilt, wenn $x(k)$ wie im Vorbereitungsmaterial den k-ten Markierungen entspricht. Achtet darauf, dass die Reihenfolge der Matrixeinträge mit den Phasen der vorherigen Tabelle übereinstimmt. (53 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 420 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 110 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 110 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 150 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 150 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 190 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 270 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 220 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 310 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

4.3 Vervollständigt den Fahrplan, der die Abfahrts- beziehungsweise Ankuftszeiten an den verschiedenen Stationen beinhaltet. (40 Punkte)

Abfahrtsort	Abfahrtszeiten		
Abfahrt Köln	06:00	13:00	20:00
Abfahrt Münster nach Osnabrück/Bielefeld	07:50	14:50	21:50
Abfahrt Osnabrück Schleifen	08:30	15:30	22:30
Ankunft Bielefeld	09:10	16:10	23:10
Abfahrt Bielefeld	09:40	16:40	23:40
Abfahrt Osnabrück nach Münster	10:30	17:30	00:30
Abfahrt Münster nach Köln	11:10	18:10	01:10

Aufgabe 5: Optimale Spielstrategie (103 Punkte)

Zwei Spieler möchten ein Brettspiel spielen, das wie in dem folgenden Graphen zu sehen, gestaltet ist:

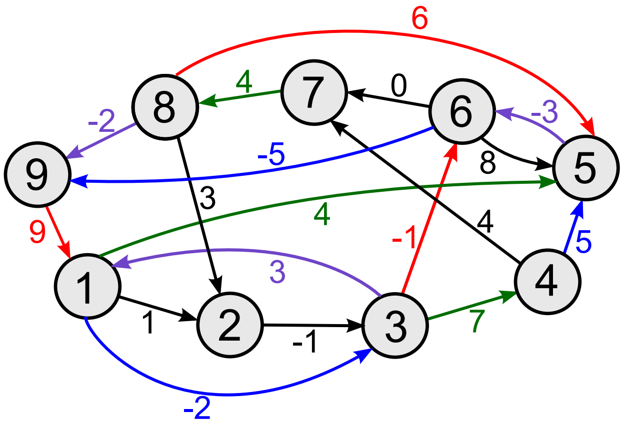


Abbildung 3: Spielbrett

Vor jedem Zug stehen die beiden Spieler auf einem der neun Felder. In jedem Spielzug bewegt sich dabei jeder Spieler von einem Knoten über eine der abgebildeten Kanten zu einem anderen Knoten, wobei sich auch mehrere Spieler auf dem selben Knoten befinden dürfen. Die Kanten sind dabei jeweils mit einer Punktzahl beschriftet, die auf das zunächst leere Punktekonto eines Spielers hinzuaddiert werden, wenn er in einem Spielzug über diese Kante läuft. Die Farbe der Kante dient dabei nur der vereinfachten Punktzahlzuordnung und ist für das Spiel irrelevant. Während eines Spiels darf eine Kante beliebig oft verwendet werden. Da auch negative Kanten vorliegen, kann es sein, dass sich das Punktekonto eines Spielers im Laufe des Spiels auch verringert. Ziel des Spiels ist es nach 20 Runden eine möglichst hohe Gesamtpunktzahl zu erreichen.

5.1 Stellt die zu dem Graphen gehörige Matrix A auf, die die Informationen der möglichen Spielzüge enthält.(18 Punkte)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ -2 & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -5 & \varepsilon & -2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

5.2 Ergänzt die fehlenden Einträge der Tabelle und bestimmt den Eigenwert λ der Matrix A. Die benötigten *Potenzen* von A sind angegeben. (27 Punkte)

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 10 \\ 0 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 7 \\ 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & 13 \\ 1 & -2 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -6 & \varepsilon & -8 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad A^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \varepsilon & 1 & 4 & 11 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 11 & \varepsilon & 7 & 7 & 8 & 10 \\ -1 & 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 6 & 5 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 14 \\ 10 & 11 & 12 & 14 & 5 & 13 & 10 & 11 & 13 \\ -1 & -2 & 9 & 2 & 2 & 5 & 7 & 1 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 2 & -3 & 5 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 15 & 8 & 1 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -4 & -7 & -6 & 6 & -8 & 2 & 2 & -2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$A^{\odot 4} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 15 & 1 & 11 & 9 & 8 & 12 \\ 4 & 3 & 18 & 11 & 4 & 7 & 12 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 2 & 10 & -1 & 6 & 9 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 13 & 12 & 16 \\ 12 & 11 & 21 & 14 & 10 & 13 & 15 & 14 & 19 \\ 7 & 8 & 9 & 11 & 2 & 10 & 5 & 8 & 8 \\ 11 & 10 & 12 & 2 & 2 & 5 & 7 & 13 & 18 \\ 13 & 14 & 15 & 6 & 1 & 9 & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ -4 & -7 & 13 & 6 & -1 & 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 5} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 22 & 13 & 8 & 9 & 12 & 10 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 16 & 4 & 12 & 12 & 10 & 13 \\ 3 & 1 & 17 & 13 & 3 & 9 & 11 & 6 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 17 & 6 & 13 & 16 & 14 & 16 \\ 19 & 20 & 21 & 19 & 10 & 18 & 18 & 17 & 21 \\ 9 & 8 & 18 & 9 & 7 & 10 & 12 & 11 & 16 \\ 11 & 11 & 14 & 11 & 2 & 13 & 17 & 16 & 20 \\ 15 & 14 & 16 & 6 & 6 & 9 & 11 & 17 & 22 \\ 11 & 12 & 13 & 6 & -1 & 7 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{\odot 6} = \begin{pmatrix} 20 & 21 & 20 & 16 & 6 & 16 & 14 & 14 & 14 \\ 18 & 17 & 23 & 16 & 9 & 12 & 14 & 20 & 25 \\ 15 & 16 & 20 & 15 & 6 & 11 & 10 & 9 & 12 \\ 10 & 9 & 24 & 20 & 10 & 16 & 18 & 14 & 17 \\ 21 & 20 & 26 & 22 & 15 & 18 & 21 & 23 & 28 \\ 16 & 17 & 16 & 16 & 7 & 15 & 15 & 14 & 18 \\ 12 & 13 & 18 & 21 & 10 & 17 & 20 & 18 & 20 \\ 15 & 15 & 18 & 15 & 6 & 17 & 21 & 20 & 24 \\ 13 & 12 & 14 & 6 & 4 & 7 & 9 & 15 & 20 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 7} = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 23 & 18 & 13 & 14 & 18 & 24 & 29 \\ 21 & 22 & 23 & 18 & 9 & 20 & 24 & 23 & 27 \\ 18 & 19 & 22 & 14 & 8 & 14 & 13 & 19 & 24 \\ 22 & 23 & 27 & 22 & 13 & 18 & 18 & 16 & 19 \\ 24 & 25 & 29 & 25 & 15 & 23 & 27 & 26 & 30 \\ 18 & 15 & 23 & 19 & 12 & 15 & 18 & 20 & 25 \\ 16 & 17 & 28 & 24 & 14 & 20 & 22 & 18 & 21 \\ 16 & 17 & 22 & 25 & 14 & 21 & 24 & 22 & 24 \\ 13 & 13 & 16 & 13 & 4 & 15 & 19 & 18 & 22 \end{pmatrix}$$

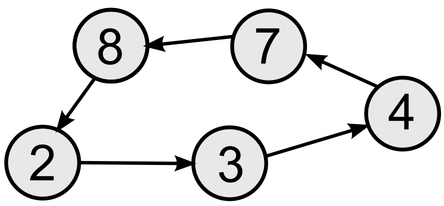
$$A^{\odot 8} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 25 & 22 & 11 & 24 & 28 & 27 & 31 \\ 23 & 22 & 25 & 28 & 17 & 24 & 27 & 25 & 30 \\ 20 & 21 & 21 & 17 & 11 & 19 & 23 & 22 & 27 \\ 25 & 26 & 29 & 22 & 15 & 21 & 20 & 26 & 31 \\ 27 & 28 & 32 & 31 & 20 & 27 & 30 & 28 & 33 \\ 21 & 22 & 26 & 22 & 12 & 20 & 24 & 23 & 27 \\ 26 & 27 & 31 & 26 & 17 & 22 & 22 & 20 & 25 \\ 20 & 21 & 32 & 28 & 18 & 24 & 26 & 22 & 25 \\ 14 & 15 & 20 & 23 & 12 & 19 & 22 & 20 & 22 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 9} = \begin{pmatrix} 23 & 24 & 29 & 32 & 21 & 28 & 31 & 29 & 30 \\ 23 & 24 & 35 & 31 & 21 & 27 & 29 & 28 & 32 \\ 22 & 20 & 24 & 27 & 16 & 23 & 26 & 25 & 29 \\ 27 & 28 & 29 & 24 & 18 & 26 & 30 & 29 & 34 \\ 30 & 31 & 38 & 34 & 24 & 30 & 32 & 31 & 36 \\ 24 & 25 & 29 & 28 & 17 & 24 & 27 & 25 & 30 \\ 29 & 30 & 33 & 26 & 19 & 25 & 24 & 30 & 35 \\ 30 & 31 & 35 & 30 & 21 & 26 & 26 & 24 & 29 \\ 18 & 19 & 30 & 26 & 16 & 22 & 24 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

Auszufüllende Tabelle:

	11	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
$k=1$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon$
$k=2$	$\frac{1}{2}=0,5$	$\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$	$\frac{1}{2}=0,5$	$\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$	$\frac{5}{2}=2,5$	$\frac{5}{2}=2,5$	$\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
$k=3$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$
$k=4$	$\frac{5}{4}=1,25$	$\frac{3}{4}=0,75$	$\frac{2}{4}=0,5$	$\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$	$\frac{10}{4}=2,5$	$\frac{10}{4}=2,5$	$\frac{7}{4}=1,75$	$\frac{7}{4}=1,75$	$\frac{5}{4}=1,25$
$k=5$	$\frac{5}{5}=1$	$\frac{17}{5}=3,4$	$\frac{17}{5}=3,4$	$\frac{17}{5}=3,4$	$\frac{10}{5}=2$	$\frac{10}{5}=2$	$\frac{17}{5}=3,4$	$\frac{17}{5}=3,4$	$\frac{5}{5}=1$
$k=6$	$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$	$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$	$\frac{15}{6}=2,5$	$\frac{15}{6}=2,5$	$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$	$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$	$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$
$k=7$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}$
$k=8$	$\frac{21}{8}$	$\frac{22}{8}=2,75$	$\frac{21}{8}$	$\frac{22}{8}=2,75$	$\frac{20}{8}=2,5$	$\frac{20}{8}=2,5$	$\frac{22}{8}=2,75$	$\frac{22}{8}=2,75$	$\frac{22}{8}=2,75$
$k=9$	$\frac{23}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{23}{9}$
$\underset{k=1,2,..,9}{max}$	$\frac{10}{3}$	3,4	3,4	3,4	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{9}$	3,4	3,4	$\frac{10}{3}$

Eigenwert: $\lambda = \underset{i=1,\ldots,9}{max} \quad \underset{k=1,\ldots,9}{max} = \frac{a_{ii}^k}{k} = 3,4$

5.3 Gebt den kritischen Zyklus an. (18 Punkte)



5.4 Ist es bei 20 Spielzügen von Vorteil von einem der Felder zu starten, die zu dem kritischen Zyklus gehören? Begründet kurz, warum oder warum nicht. (10 Punkte)

Nein, man kann mehr Punkte erzielen, wenn man am Anfang oder Ende Wege außerhalb des Zyklus wählt, die ein höheres Kantendurchschnittsgewicht besitzen.

5.5 Wenn wir die Kanten und zugehörigen Kantengewichte unseres Spielbrettes ändern, aber die Knoten beibehalten, erhalten wir folgende normierte Maximumsmatrix B_λ^+.

$$B_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 & -8 & 5 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 4 & -3 & -2 \\ -8 & -3 & 2 & -5 & -4 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 4 & 6 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & -7 & 0 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & -9 & 1 & 1 & -3 & 7 & 1 \\ -7 & -4 & -3 & -6 & -3 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & -3 & -5 & -5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus dieser können wir wie gewohnt die kritischen Zyklen ablesen, von denen es in diesem Fall mehrere gibt. Gebt für alle kritischen Zyklen an, welche Knoten dazu gehören. (30 Punkte)

Knoten 1, 8

Knoten 2,4 und 7

Knoten 5