Korrekturschlüssel Sum of Us 2023

1 Florida [100 Punkte]

Antworten

Frage 1. [20 Punkte]

$$67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75$$

(20 Punkte für die richtige Antwort, 10 Punkte, wenn nur eine der beiden Grenzen stimmt)

Frage 2. [40 Punkte]

Anzahl	74	$\boxed{\mathbf{63}}$	42	21	103	24	$\boxed{\mathbf{92}}$	81
1. Platz	A	A	B	B	C	C	D	D
2. Platz	B	D	$\boxed{\mathbf{A}}$	C	$\boxed{\mathbf{D}}$	A	$\boxed{\mathbf{C}}$	B
3. Platz	$\boxed{\mathbf{D}}$	C	C	D	B	D	$\boxed{\mathbf{B}}$	A
4. Platz	$\boxed{\mathbf{C}}$	B	$\boxed{\mathbf{D}}$	A	A	B	A	$\boxed{\mathbf{C}}$

(4 Punkte pro richtig ausgefülltem Wert, keine Minuspunkte bei falschem Wert)

Frage 3. [40 Punkte]

	731	94	687	202	178	76
						$\boxed{131}$
1. Wahl	A	A	D	B	C	D
			$\boxed{B}$			
2. Wahl	B	C	A	C	C	B
					$\boxed{A}$	
3. Wahl	A	D	C	D	B	A
	$\boxed{C}$					
4. Wahl	D	B	B	A	D	C
			$\boxed{D}$			

(8 Punkte pro richtig korrigiertem Wert, keine Minuspunkte für falsche Korrektur)

Kurze Ausarbeitung

Frage 1. Wir bezeichnen die Zahl in der fehlenden Spalte mit a, wir haben also folgende Tabelle:

	122	58	a	47
1. Wahl	A	C	$*$	B
2. Wahl	B	A	$*$	A
3. Wahl	C	B	$*$	C

Wir betrachten zunächst die Borda-Methode. Ohne die fehlende Spalte hat A bereits $3 \cdot 122 + 2 \cdot 58 + 2 \cdot 47 = 576$ Punkte, und B hat bereits $2 \cdot 122 + 1 \cdot 58 + 3 \cdot 47 = 443$ Punkte. Laut Aufgabenstellung liegt B nach der Borda-Methode vor A. Durch die fehlende Spalte muss B also mehr als $576 - 443 = 133$ Punkte mehr als A erhalten.

Insgesamt gibt es weniger als 350 Wählende, d.h. $122+58+a+47 < 350$ und daraus ergibt sich $a < 123$.

Um mehr als 133 Punkte durch die fehlende Spalte auf A aufzuholen, muss B zwei Positionen vor A liegen, die einzig mögliche Reihung in der fehlenden Spalte ist also B als 1. Wahl, C als 2. Wahl und A als 3. Wahl:

	122	58	a	47
1. Wahl	A	C	B	B
2. Wahl	B	A	C	A
3. Wahl	C	B	A	C

Nun können wir die Punkte nach der Borda-Methode fertig berechnen (abhängig von der Zahl a): A hat

$$3 \cdot 122 + 2 \cdot 58 + 1 \cdot a + 2 \cdot 47 = 576 + a$$

Punkte, und B hat

$$2 \cdot 122 + 1 \cdot 58 + 3 \cdot a + 3 \cdot 47 = 443 + 3 \cdot a$$

Punkte. Da B nach der Borda-Methode vor A liegt, folgt $443 + 3 \cdot a > 576 + a$. Umformen liefert $2 \cdot a > 133$, also

$$a \geq 67. \tag{1}$$

Andererseits gewinnt B nicht nach der Mehrheitsmethode, also kann B nicht häufiger als 1. Wahl genannt werden als A. Damit gilt $a + 47 \leq 122$ und es folgt

$$a \leq 75. \tag{2}$$

Setzen wir die Ungleichungen (1) und (2) zusammen, so erhalten wir die möglichen Werte von a, nämlich 67,68,69,70,71,72,73,74,75.

Frage 2. Wir bezeichnen die fehlenden Zahlen in der ersten Zeile mit a und b und ergänzen jeweils den einen fehlenden Eintrag in der fünften und achten Spalte (jeder Buchstabe muss in jeder Spalte genau einmal vorkommen):

	74	a	42	21	103	24	b	81
1. Wahl	A	A	B	B	C	C	D	D
2. Wahl	B	D	$*$	C	D	A	$*$	B
3. Wahl	$*$	C	C	D	B	D	$*$	A
4. Wahl	$*$	B	$*$	A	A	B	A	C

Insgesamt gibt es 500 Wählende, durch Addieren der Zahlen in der ersten Zeile erhalten wir

$$a + b = 155. \tag{3}$$

Es gewinnt D nach dem Mehrheitsprinzip, insbesondere muss D öfter als 1. Wahl auftauchen als A und damit gilt $74 + a < b + 81$ und durch Umstellen ergibt sich

$$a - b < 7. \tag{4}$$

Wir berechnen die Punkte von A im Borda-Verfahren. In der dritten Spalte ist die Position von A nicht bekannt, hier erhält A entweder

$3 \cdot 42 = 126$ oder 42 Punkte; wir benutzen die Bezeichnung x für diese noch nicht bekannte Punktzahl. Dann ergibt sich für die Borda-Punkte von A:

$$1124 = 4 \cdot 74 + 4a + x + 21 + 103 + 3 \cdot 24 + b + 2 \cdot 81 = 654 + 4a + x + b.$$

Wir ersetzen b durch $155 - a$ nach Gleichung (3), dann folgt

$$1124 = 654 + 4a + x + 155 - a = 809 + 3a + x.$$

Umstellen ergibt

$$3a = 315 - x.$$

Wir wissen, dass $x = 126$ oder $x = 42$ ist; setzen wir diese Werte ein, erhalten wir $a = 63$ oder $a = 91$. Nach (3) können wir dann auch die möglichen Werte für b berechnen und erhalten

$$a = 63,\ b = 92 \quad \text{oder} \quad a = 91,\ b = 64.$$

Durch die Ungleichung (4) kommt nur die erste Möglichkeit in Frage, also gilt

$$x = 126 \quad \text{und} \quad a = 63 \quad \text{und} \quad b = 92. \tag{5}$$

Durch den Wert von x ist auch die Position von A in der dritten Spalte geklärt und die Tabelle hat die Form (neu bestimmte Einträge in blau):

	74	63	42	21	103	24	92	81
1. Wahl	A	A	B	B	C	C	D	D
2. Wahl	B	D	A	C	D	A	$*$	B
3. Wahl	$*$	C	C	D	B	D	$*$	A
4. Wahl	$*$	B	D	A	A	B	A	C

Jetzt betrachten wir die paarweisen direkten Duelle von A, B, C, D gegeneinander. Nach Aufgabenstellung gewinnt D gegen die drei anderen im direkten Duell und A, B, C gewinnen und verlieren untereinander jeweils ein Duell.

Beim Duell zwischen A und B liegt A $74 + 63 + 24$ mal vorne und B liegt $42 + 21 + 103 + 92 + 81$ mal vorne, das Duell zwischen A und B gewinnt also B. Dann muss B aber das Duell gegen C verlieren. Beim Duell zwischen B und C sind die Stimmen in der vorletzten Spalte noch nicht zuzuordnen. Ohne diese Spalte liegt B $74 + 42 + 21 + 81 = 218$ mal vorne und C liegt $63 + 103 + 24 = 190$ mal vorne. Da C gewinnen muss, muss C in der vorletzten Spalte vor B liegen. Damit haben wir weitere neue Einträge in der Tabelle gefunden:

	74	63	42	21	103	24	92	81
1. Wahl	A	A	B	B	C	C	D	D
2. Wahl	B	D	A	C	D	A	C	B
3. Wahl	$*$	C	C	D	B	D	B	A
4. Wahl	$*$	B	D	A	A	B	A	C

Zur Bestimmung der Einträge in der ersten Spalte betrachten wir das Duell zwischen C und D, das nach Aufgabenstellung von D gewonnen wird. Ohne die Stimmen aus der ersten Spalte liegt hier C $42 + 21 + 103 + 24 = 190$ mal vorne und D liegt $63 + 92 + 81 = 236$ mal vorne. Würde C die 74 Stimmen aus der ersten Spalte gewinnen, läge C im direkten Duell gegen D vorne, was aber nicht sein kann. Also muss D in der ersten Spalte vor C liegen. Damit hat die vervollständigte Tabelle die folgende Form:

	74	63	42	21	103	24	92	81
1. Wahl	A	A	B	B	C	C	D	D
2. Wahl	B	D	A	C	D	A	C	B
3. Wahl	D	C	C	D	B	D	B	A
4. Wahl	C	B	D	A	A	B	A	C

Frage 3. Pro Spalte sind nach Borda 10 Punkte zu vergeben. Insgesamt wurden $6359 + 6592 + 4567 + 2712 = 20230$ Punkte vergeben, also wurden 2023 Stimmen abgegeben. Die Stimmensumme laut Kopfzeile ist jedoch 1968. Daher muss eine Stimmenzahl um 55 nach oben korrigiert werden (weil genau eine falsch ist).

Laut unkorrigierter Präferenztabelle erhält D nach Borda-Methode 4553 Punkte, also $4553 - 2712 = 1841$ mehr als tatsächlich. Korrigieren wir eine Stimmenzahl um 55 nach oben, so erhöhen sich diese Punkte um weitere 55, 110, 165 oder 220 je nach D-Wahl in dieser Spalte. Wir müssen daher in mindestens einer Spalte D weiter nach unten rücken.

Bleibt D in der dritten Spalte als 1. Wahl, so lässt sich die Borda-Punktzahl nicht um 1841 reduzieren (D könnte in der letzten Spalte um maximal drei Positionen nach unten gesetzt werden und noch in der zweiten oder vierten um eine Position, aber damit erreicht man bei weitem nicht die nötigen 1841 Punkte). D muss also in der dritten Spalte nach unten gerückt werden. Damit bleibt D in der letzten Spalte als 1. Wahl, da in jeder Zeile nur ein Fehler ist. Würde D in der dritten

Spalte nicht an die letzte Position gesetzt, so ergäbe sich in dieser Spalte maximal eine Reduktion um $2 \cdot (687 + 55) = 1484$ Punkte; dazu könnte D noch in der zweiten oder vierten Spalte eine Position nach unten gesetzt werden, was aber nicht die benötigten 1841 Punkte bringt (auch wenn die 55 zusätzlichen Stimmen in einer anderen Spalte hinzugefügt werden). Also muss D in der dritten Spalte als 4. Wahl gesetzt werden. Da in jeder Zeile nur ein Fehler ist, darf in der ersten und vierten Zeile keine weitere Änderung gemacht werden.

In jeder Spalte (ohne Kopf) kommt jeder Buchstabe genau einmal vor. Für Spalten 2, 3, 4, 6 ist dies bereits der Fall. Spalten 1 und 5 müssen jeweils an mindestens einer Stelle geändert werden: Spalte 1 in Zeile 1 oder 3 und Spalte 5 in Zeile 1 oder 2 (aber nicht beide in Zeile 1). Wegen der erzwungenen Änderung von 1. und 4. Zeile in Spalte 3 bleiben für die Behebung der Fehler in Spalte 1 und 5 nur die Zeilen 3 in Spalte 1 und 2 in Spalte 5. Außerdem sind dann keine weiteren Änderungen in Zeile 2 und 3 erlaubt, d.h. in Spalte 3 werden D und B vertauscht.

Damit sind alle Buchstabenzeilen festgelegt:

	731	94	687	202	178	76
1. Wahl	A	A	B	B	C	D
2. Wahl	B	C	A	C	A	B
3. Wahl	C	D	C	D	B	A
4. Wahl	D	B	D	A	D	C

Die überkompensierten $2061 - 1841 = 220 = 4 * 55$ Borda-Punkte werden durch die Spalte ausgeglichen, in der die Stimmenzahl um 55 nach oben korrigiert wird. In dieser muss D an 1. Stelle stehen, also wird Spaltenkopf 6 zu $76 + 55 = 131$ Stimmen.

Die korrigierte Tabelle hat also die Form

	731	94	687	202	178	131
1. Wahl	A	A	B	B	C	D
2. Wahl	B	C	A	C	A	B
3. Wahl	C	D	C	D	B	A
4. Wahl	D	B	D	A	D	C

2 Wyoming [80 Punkte]

Antworten

Frage 1. [80 Punkte]

(a) $A \succ C \succ B$

(b) $B \succ C \succ A$

(c) $B \succ C \succ A$

(d) $C \succ A \succ B$

(20 Punkte pro vollständig richtigem Wahlergebnis, 10 Punkte, wenn genau ein*e Kandidat*in an der richtigen Stelle ist)

Kurze Ausarbeitung

Frage 1. Gegeben ist die folgende Präferenztabelle:

	90 000	25 000	50 000	85 000
1. Wahl	A	B	B	C
2. Wahl	B	A	C	B
3. Wahl	C	C	A	A

(a) Beim Mehrheitsverfahren wird gezählt, wie häufig eine Person als 1. Wahl genannt wird. Hier ergeben sich für A 90,000 Stimmen, für B $25\,000 + 50\,000 = 75\,000$ Stimmen und für C 85 000 Stimmen. Nach dem Mehrheitsverfahren erhalten wir als Reihung A, C, B.

(b) Beim paarweisen Mehrheitsverfahren wird für jedes Paar von Personen verglichen, wer häufiger vor der anderen Person gereiht wurde. Für den Gewinn eines solchen Duells erhält die siegende Person einen Punkt.

Wir beginnen mit dem Duell zwischen A und B. A liegt vor B bei 90 000 Wählenden, umgekehrt liegt B vor A bei $25\,000 + 50\,000 + 85\,000 = 160\,000$ Wählenden. B gewinnt dieses Duell und erhält einen Punkt.

Als nächstes betrachten wir das Duell zwischen A und C. A liegt vor C bei $90\,000 + 25\,000 = 115\,000$ Wählenden, umgekehrt liegt C vor A bei $50\,000 + 85\,000 = 135\,000$ Wählenden. C gewinnt dieses Duell und erhält einen Punkt.

Zuletzt betrachten wir das Duell zwischen B und C. B liegt vor C bei $90\,000 + 25\,000 + 50\,000 = 165\,000$ Wählenden, umgekehrt liegt C vor B bei 85 000 Wählenden. B gewinnt dieses Duell und erhält einen Punkt.

B erzielt zwei Punkte, C einen Punkt und A keinen Punkt. Als Wahlausgang bei paarweisem Mehrheitsverfahren erhalten wir die Reihung B, C, A.

(c) Nach dem Borda-Verfahren ergeben sich für A

$$3 \cdot 90\,000 + 2 \cdot 25\,000 + 1 \cdot 50\,000 + 1 \cdot 85\,000 = 455\,000$$

Punkte, für B ergeben sich

$$2 \cdot 90\,000 + 3 \cdot 25\,000 + 3 \cdot 50\,000 + 2 \cdot 85\,000 = 575\,000$$

Punkte, und für C ergeben sich

$$1 \cdot 90\,000 + 1 \cdot 25\,000 + 2 \cdot 50\,000 + 3 \cdot 85\,000 = 470\,000$$

Punkte. Nach dem Borda-Verfahren erhalten wir die Reihung B, C, A.

(d) B wird am seltensten als 1. Wahl genannt (75 000 Mal, A aber 90 000 Mal und C 85 000 Mal). Wir streichen B aus allen Ranglisten und erhalten die neue Tabelle:

	90 000	25 000	50 000	85 000
1. Wahl	A	A	C	C
2. Wahl	C	C	A	A

Nun wird A seltener als C als 1. Wahl genannt. Wir streichen also A und nur C bleibt übrig. Die Reihung bei der integrierten Stichwahl ist in umgekehrter Reihenfolge des Ausscheidens, wir erhalten als Wahlausgang daher die Reihung C, A, B.

3 Oklahoma [120 Punkte]

Antworten

Frage 1. [5 Punkte]
4
(5 Punkte für die richtige Antwort)

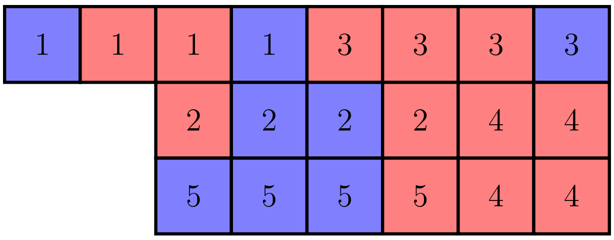
Frage 2. [15 Punkte]
3
(15 Punkte für die richtige Antwort)

Frage 3. [5 Punkte]
5
(5 Punkte für die richtige Antwort)

Frage 4. [15 Punkte]
4
(15 Punkte für die richtige Antwort)

Frage 5. [20 Punkte]
Es sind mehrere Lösungen möglich.
(20 Punkte für ein richtiges Kreuz mit korrekter Bezirkszuordnung)

Beispiel: Wenn einer der blauen Quadrate mit der Nummer 5 die Farbe wechselt, gewinnt die rote Partei in allen Bezirken.

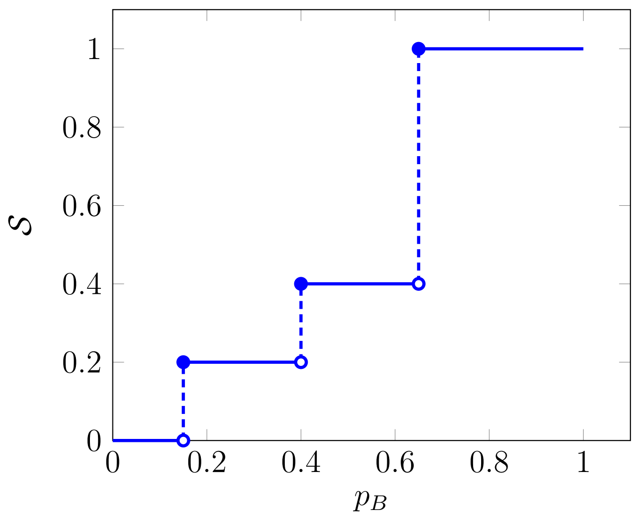


Frage 6. [10 Punkte]
92/95
(10 Punkte für die richtige Antwort, 5 Punkte, wenn der Bruch noch vereinfacht werden kann)

Frage 7. [10 Punkte]
4
(10 Punkte für die richtige Antwort)

Frage 8. [10 Punkte]
-0.10
(10 Punkte für die richtige Antwort)

Frage 9. [15 Punkte]



(15 Punkte für die richtige Antwort und -5 für kleinere Fehler wie falsche Zuordnungen der Randpunkte in den Teilintervallen)

Frage 10. [5 Punkte]
-0.1
(5 Punkte für die richtige Antwort, 2 Punkte für die falsche Antwort 0.1, auf Grundlage einer richtig gezeichneten simulierten Sitzkurve, 3 Punkte für die richtige Antwort -0.1 auf Grundlage einer falsch gezeichneten simulierten Sitzkurve sowie 1 Punkt für die falsche Antwort 0.1 auf Grundlage einer falsch gezeichneten Sitzkurve)

Frage 11. [10 Punkte]
Rot
(10 Punkte für die richtige Antwort, 0 Punkte für keine Antwort und -10 Punkte für die falsche Antwort)

Kurze Ausarbeitung

Frage 1. Zum Gewinn eines Bezirks benötigt die blaue Partei die Hälfte der Stimmen, also zwei von vier Kästchen des jeweiligen Bezirks. Da die blaue Partei insgesamt acht Kästchen hat, kann sie höchstens vier Bezirke gewinnen.

Frage 2. Das blaue Quadrat rechts oben kann nicht mit einem anderen blauen Quadrat in einem Bezirk mit zusammenhängenden Quadraten verbunden werden und ist daher immer eine Verliererstimme. Damit bleiben nur sieben blaue Quadrate. Da zwei Quadrate für jeden gewonnenen Bezirk nötig sind, kann die blaue Partei höchstens drei Bezirke gewinnen. Umgekehrt gibt es auch eine Aufteilung in Bezirke aus zusammenhängenden Quadraten, in der die blaue Partei drei Bezirke gewinnt (gleiche Zahlen bezeichnen jeweils einen Bezirk):

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	3	3	4	4
		5	5	5	5	4	4

Frage 3. Da die rote Partei bei der Hälfte der Stimmen, also bei zwei Kästchen, den Bezirk gewinnt, kann die rote Partei alle fünf Bezirke gewinnen (von den acht blauen Kästchen können in vier Bezirken jeweils zwei zugeordnet werden).

Frage 4. Wir betrachten zunächst die beiden linken Quadrate in der oberen Reihe. Da die Bezirke zusammenhängend sein sollen, müssen diese Quadrate in demselben Bezirk sein und es bleiben nur zwei Möglichkeiten:

1	1	1	1	?	?	?	?
		?	?	?	?	?	?
		?	?	?	?	?	?

oder

1	1	1	?	?	?	?	?
		1	?	?	?	?	?
		?	?	?	?	?	?

In beiden Fällen kann das linke untere Quadrat nicht mit zwei roten Quadraten in einem zusammenhängenden Bezirk verbunden werden. Also gewinnt die blaue Partei diesen Bezirk. Die rote Partei gewinnt also höchstens vier Bezirke. Umgekehrt gibt es Aufteilungen, bei der die rote Partei vier Bezirke gewinnt, z.B.

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	3	3	4	4
		5	5	5	5	4	4

Frage 5. Es sind mehrere Lösungen möglich. Wir betrachten die folgende Aufteilung in zusammenhängende Bezirke:

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	3	3	4	4
		5	5	5	5	4	4

Wenn eines der drei blauen Quadrate in der unteren Reihe die Farbe wechselt, dann gewinnt die rote Partei alle Bezirke.

Frage 6. Es gibt 20 Quadrate und damit $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ Verbindungsstrecken. Davon liegen 6 Strecken nicht ganz innerhalb des Gebietes. Der Konvexitätskoeffizient ist somit $\frac{184}{190} = \frac{92}{95} \approx 96.84\%$.

1	2	3	4	5	6	7	8
		9	10	11	12	13	14
		15	16	17	18	19	20

Es liegen 6 Verbindungsstrecken nicht vollständig innerhalb des Gebiets des Bundesstaates, nämlich die zwischen 1 und 9, 1 und 15, 1 und 16, 1 und 17, 1 und 18, 2 und 15. Der Konvexitätskoeffizient ist somit

$$\frac{190 - 6}{190} = \frac{184}{190} = \frac{92}{95} \approx 96{,}84\%.$$

Frage 7. Konvexität der Bezirke bedeutet, dass die Bezirke nicht „hakenförmig“ (in L-Form) sein können, d.h. die vier Quadrate eines Bezirks sind entweder waagerecht in einer Reihe oder als Quadrat angeordnet oder T-förmig.

Ein T-förmiger Bezirk kann wegen der verbleibenden Reststücke an den meisten Positionen direkt ausgeschlossen werden; an den übrigen (z.B. mit dem Balken am rechten Rand), weil die Fortsetzung bis links nicht mit konvexen Bezirken möglich ist.

Die beiden linken Quadrate in der oberen Reihe müssen in einem waagerecht angeordneten Bezirk sein. Wenn das fünfte Quadrat der oberen Reihe in einem quadratischen Bezirk ist, gibt es nur eine Möglichkeit:

1	1	1	1	2	2	4	4
		3	3	2	2	4	4
		3	3	5	5	5	5

Ab jetzt sei das fünfte Quadrat in einem waagerechten Bezirk:

1	1	1	1	2	2	2	2
		?	?	?	?	?	?
		?	?	?	?	?	?

Wenn das erste Quadrat in der mittleren Reihe in einem waagerechten Bezirk ist, gibt es nur eine Möglichkeit:

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	3	3	4	4
		5	5	5	5	4	4

Sei also jetzt das erste Quadrat der mittleren Reihe in einem quadratischen Bezirk:

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	?	?	?	?
		3	3	?	?	?	?

Dann haben wir noch zwei mögliche Aufteilungen:

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	4	4	4	4
		3	3	5	5	5	5

und

1	1	1	1	2	2	2	2
		3	3	4	4	5	5
		3	3	4	4	5	5

Insgesamt gibt es also vier Aufteilungen, in denen alle Bezirke konvex sind.

Frage 8. Bezirk 1: 2 verlorene Quadrate für Rot.
Bezirk 2: 1 verlorenes Quadrat für Blau.
Bezirk 3: 1 verlorenes Quadrat für Rot und 1 überzähliges Quadrat für Blau.
Bezirk 4: 1 verlorenes Quadrat für die Blau.
Bezirk 5: 1 verlorenes Quadrat für Blau

Rot hat insgesamt 3 vergeudete Quadrate, Blau 4. Die Effizienzlücke ist daher:

$$\frac{4-3}{20} = 0.05$$

Frage 9. Ohne Wählerumschwung starten wir mit acht blauen Quadraten von 20 insgesamt, also mit $p = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$. Bei der gegebenen

Bezirksaufteilung gewinnt Blau Von den fünf Bezirken zwei (nämlich 1 und 3), also einen Sitzanteil von $Q = \frac{2}{5} = 0.4$. Somit liegt $(0.4, 0.4)$ auf der Sitzkurve.

Damit Blau mindestens einen weiteren Bezirk gewinnt, muss Blau ein weiteres Quadrat gewinnen. Bei der Konstruktion der Sitzkurve ändern wir jeden Bezirk um die gleiche Stimmenzahl. Sobald wir in jedem Bezirk die Zahl der blauen Quadrate um $t = 1$ erhöhen, enthält jeder Bezirk mindestens zwei blaue Quadrate, so dass Blau jeden Bezirk gewinnt. Also springt die Sitzkurve bei $p_1 = \frac{8+5}{20} = 0.65$ auf den Wert $Q_1 = 1$

Damit Rot mindestens einen weiteren Bezirk gewinnt, muss Blau in einem Bezirk mit Stimmengleichstand eine Stimme abgeben. Es gibt nur einen solchen Bezirk (nämlich 1), daher springt die Kurve links von $p = 0.4$ auf den Wert $Q_{-1} = \frac{1}{5} = 0.2$. Diesen Wert nimmt die Kurve auch noch an, wenn wir in allen Bezirken ein blaues Quadrat rot umfärben, also für $p_{-1} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20} = 0.15$.

Links hiervon verliert Blau auch noch den Bezirk 3, die Kurve springt also in 0.15 von 0 auf 0.2.

[Hinweis: Im Vorbereitungsmaterial steht S für die Anahl der gewonnenen Bezirke und Q für deren Anteil; die Graphen verwenden S für den Anteil.]

Frage 10. In 0.5 hat die Kurve den Wert 0.4. Die Höhe über 0.5 ist also -0.1.

Frage 11. Die Bezirkseinteilung scheint Rot zu bevorteilen, da die Höhe negativ ist. (Die Effizienzlücke spricht für eine Bevorteilung von Blau, ist aber dem Betrag nach kleiner und unterhalb der gängigen Signifikanzschwelle von 0.8.)

4 Iowa

Antworten

Frage 1. [5 Punkte]
18 Millionen
(5 Punkte für die richtige Lösung.)

Frage 2. [5 Punkte]
$p_G + p_B + p_R = 1$
(5 Punkte für die richtige Gleichung.)

Frage 3. [10 Punkte]
$p_B = p_{BGR} + p_{BRG}$ und $p_G = p_{GBR} + p_{GRB}$
(Jeweils 5 Punkte pro richtiger Gleichung.)

Frage 4. [10 Punkte]
$(3 \cdot p_R + 2 \cdot (p_{BRG} + p_{GRB}) + 1 \cdot (p_{BGR} + p_{GBR})) \cdot 3\,000\,000$
(10 Punkte für die richtige Lösung, 5 Punkte, wenn sie das Produkt mit 3 000 000 vergessen. Auch bis auf Termumformungen äquivalente Ausdrücke werden mit der entsprechenden Punktzahl bewertet.)

Frage 5. [10 Punkte]
$(2 \cdot p_G + p_{BGR} + p_{RGB} + 1) \cdot 3\,000\,000$
(10 Punkte für die richtige Lösung, 5 Punkte, wenn sie das Produkt mit 3 000 000 vergessen.)

Frage 6. [20 Punkte]
Die rote Partei erhält insgesamt 6.45 Millionen Punkte, die blaue Partei erhält insgesamt 6.75 Millionen Punkte und die gelbe Partei 4.8 Millionen. Blau gewinnt also die Wahl.
(5 Punkte für jede richtig berechnete Punktzahl sowie 5 Punkte für die korrekte Folgerung, dass Blau gewinnt.)

Frage 7. [10 Punkte]
$(2 + p_G) \cdot 3\,000\,000$
(10 Punkte für die richtige Lösung, 5 Punkte, wenn sie das Produkt mit 3 000 000 vergessen.)

Frage 8. [20 Punkte]
$1 - 2p_R + p_{GBR}$ und $1 - 2p_B + p_{GRB}$
(10 Punkte jeweils für jeden richtig gefundenen Ausdruck.)

Frage 9. [10 Punkte]
Die gelbe Partei erreicht die meisten Punkte und gewinnt damit die Wahl (10 Punkte für die richtige Antwort).

Frage 10. [20 Punkte]
6.15 Millionen Punkte für Rot, 5.55 Millionen Punkte für Blau und 6.3 Millionen Punkte für Gelb. Gelb gewinnt die Wahl. (5 Punkte pro richtig bestimmte Punkteanzahl, 5 Punkte für die korrekte Folgerung, dass Gelb gewinnt)

Kurze Ausarbeitung

1. Jede*r Wähler*in vergibt insgesamt 6 Punkte und es gibt 3 Millionen Wählende.

2. Die Summe der Anteile muss insgesamt 1 ergeben.

3. Klar.

4. Klar.

5. Die Punkte von Gelb sind:

$$(3 \cdot p_G + 2 \cdot (p_{BGR} + p_{RGB}) + 1 \cdot (p_{BRG} + p_{RBG})) \cdot 3\,000\,000$$

   und es gilt:

$$p_{BRG} + p_{RBG} = 1 - p_G - p_{BGR} - p_{RGB}.$$

   Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}(3 \cdot p_G + 2 \cdot (p_{BGR} + p_{RGB}) + 1 \cdot (1 - p_G - p_{BGR} - p_{RGB})) \cdot 3\,000\,000 \\ = (2 \cdot p_G + p_{BGR} + p_{RGB} + 1) \cdot 3\,000\,000\end{aligned}$$

   Andere korrekte Lösungen wurden ebenfalls akzeptiert.

6. Es ist bekannt, dass $p_G = 0.1$, so dass $p_{GBR} = p_{GRB} = 0.05$. Außerdem ist $p_{RGB} = 0.1$ und $p_{RBG} = 0.4$. Für die blaue Partei gilt $p_{BRG} = 0.1$ und $p_{BGR} = 0.3$. Damit ergibt sich für die rote Partei:

$$(3 \cdot 0.5 + 2 \cdot (0.1 + 0.05) + 1 \cdot (0.3 + 0.05)) \cdot 3.000.000 = 6.450.000.$$

   Für die blaue Partei erhalten wir:

$$(3 \cdot 0.4 + 2 \cdot (0.05 + 0.4) + 1 \cdot (0.1 + 0.05)) \cdot 3.000.000 = 6.750.000.$$

Die gelbe Partei erhält

$$(3 \cdot 0.1 + 2 \cdot (0.1 + 0.3) + 1 \cdot (0.1 + 0.4)) \cdot 3.000.000 = 4.800.000$$

Punkte.

7. Der Anteil der Punkte ist $3 \cdot p_G + 2 \cdot (p_R + p_B)$. Dieser Term kann wie folgt weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} &3000000 \cdot (3 \cdot (p_{GRB} + p_{GBR}) + 2 \cdot (p_{BGR} + p_{RGB})) \\ &= 3000000 \cdot (3 \cdot p_G + 2 \cdot (1 - p_G)) \\ &= 3000000 \cdot (2 + p_G) \end{aligned}$$

8. Wir wissen, dass $p_{RGB} = p_R$ und $p_{BGR} = p_B$. Daraus ergibt sich, dass der Stimmenanteil für Rot $1 + 2p_R + p_{GRB}$ ist. Für Blau ist dieser $1 + 2p_B + p_{GBR}$ und für Gelb $2 + p_G$. Gelb muss gewinnen, sodass wir zwei Bedingungen erhalten, die wir in der Form "> 0" schreiben können.
   Umformung für Rot (Bedingung 1):

$$\begin{aligned} &2 + p_{GBR} + p_{GRB} > 1 + 2 \cdot p_R + p_{GRB} \\ &\Leftrightarrow 1 + p_{GBR} - 2 \cdot p_R > 0 \end{aligned}$$

   Umformung für Blau (Bedingung 2):

$$\begin{aligned} &2 + p_{GBR} + p_{GRB} > 1 + 2 \cdot p_B + p_{GBR} \\ &\Leftrightarrow 1 + p_{GRB} - 2 \cdot p_B > 0 \end{aligned}$$

   Andere korrekte Lösungen wurden ebenfalls akzeptiert.

9. Die Bedingungen der vorherigen Frage sind erfüllt, sodass Gelb die Wahl gewinnt.
   Bedingung 1:

$$1 + p_{GBR} - 2 \cdot p_R > p_{GBR} \geq 0$$

   Bedingung 2:

$$1 + p_{GBR} - 2 \cdot p_B > p_{GBR} \geq 0$$

10. Es ist bekannt, dass $p_G = 0.1$, sodass $p_{GBR} = p_{GRB} = 0.05$. Des Weitern gilt $p_{RGB} = p_R = 0.5$ und $p_{RBG} = 0$. Für die blaue Partei ergibt sich $p_{BRG} = 0$ sowie $p_{BGR} = p_B = 0.4$.

    Beispielrechnung rote Partei:

    $3000000 \cdot (3 \cdot (p_{RGB} + p_{RBG}) + 2 \cdot (p_{GRB} + p_{GBR}) + 1 \cdot (p_{BGR} + p_{BRG}))$
    $= 3000000 \cdot (3 \cdot (0.5 + 0) + 2 \cdot (0.05 + 0) + 1 \cdot (0.4 + 0.05))$
    $= 6150000$

5 Idaho

Antworten

Frage 1. [10 Punkte]
B
(10 Punkte für die richtige Antwort, 0 Punkte für keine Antwort und -10 Punkte für eine falsche Antwort.)

Frage 2. [20 Punkte]
Möglichkeit 5.
(20 Punkte für die richtige Antwort, 0 Punkte für keine Antwort und -20 Punkte für eine falsche Antwort.)

Frage 3. [20 Punkte]
1/3
(20 Punkte für die richtige Antwort.)

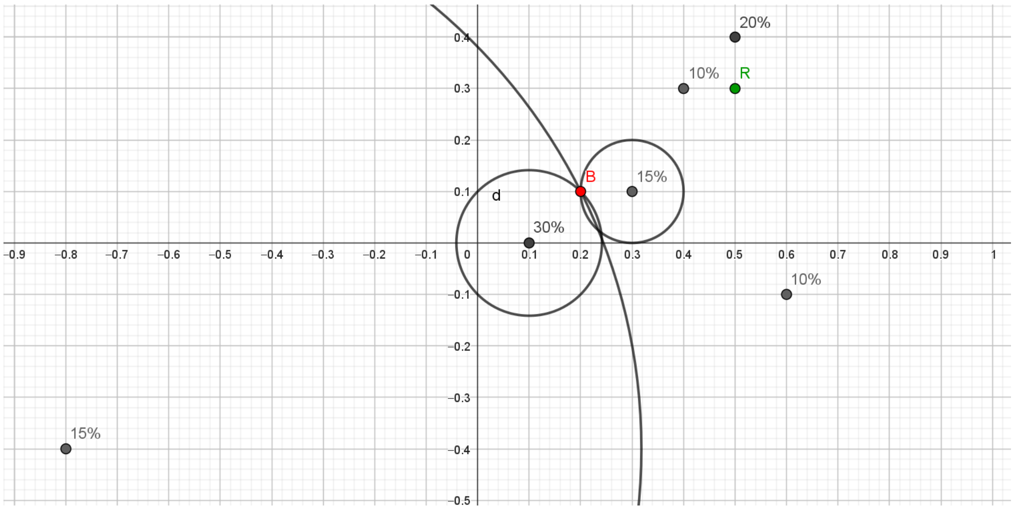
Frage 4. [10 Punkte]
Rot gewinnt.
(10 Punkte für die richtige Antwort, 0 Punkte für keine Antwort und -10 Punkte für eine falsche Antwort.)

Frage 5. [10 Punkte]
$0.4 - \frac{0.4}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$
(10 Punkte für die richtige Antwort)

Frage 6. [10 Punkte]
Sowohl die rote Partei als auch die blaue Partei erhalten einen Zustimmungsanteil von 0,4.
(Jeweils 5 Punkte für die richtige Antwort)

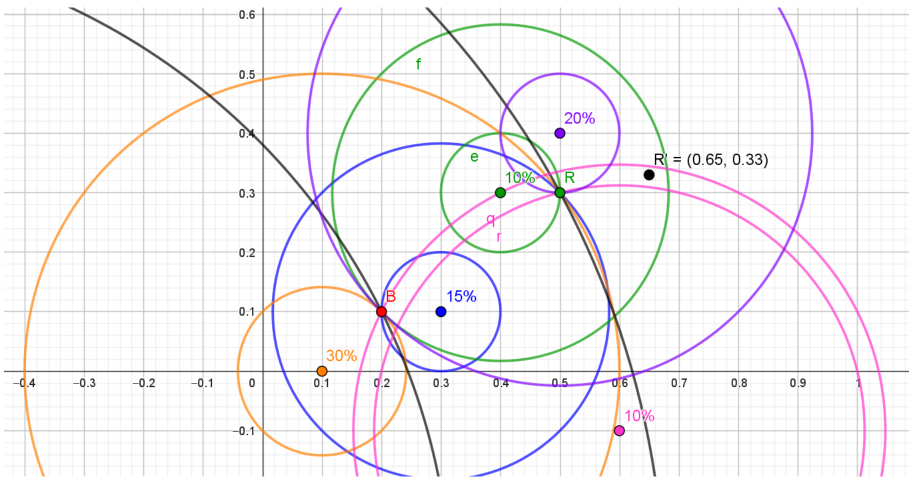
Kurze Ausarbeitung

1. Graphisch ergibt sich, dass die Punkte (-0.8, -0.4), (0.3, 0.1) sowie (0.1, 0) näher an B liegen und B somit (mindestens) 60% $\geq$ 50% der Stimmen erhält.



2. *Anmerkung zur folgenden Frage 2: Im Wettbewerb war diese Aufgabe durch einen Nachkommafehler nicht lösbar und wurde daher aus der Wertung genommen. Um die Aufgabe als Vorbereitung auf den Wettbewerb sinnvoll nutzen zu können, wurden die Antwortmöglichkeiten im Folgenden angepasst:*

   Auch diese Aufgabe kann man graphisch lösen, indem man jeweils Kreise um die in der Aufgabenstellung grauen Kreise zieht, deren Radien jeweils die Abstände zwischen einem grauen Kreis und einem Kandidierenden sind. In der folgenden Abbildung sind die beiden Kreise von einem Punkt um die beiden Kandidierenden in der gleichen Farbe dargestellt. Aus den gegebenen Bedingungen ergibt sich, dass R' für jeden Farbe innerhalb des jeweils größeren Kreises, aber außerhalb des kleinen Kreises liegen muss, wenn der jeweilige graue Punkt näher an R als an B liegt. Wenn umgekehrt der graue Punkt näher an B als an R liegt, so muss R' außerhalb beider Kreise einer Farbe liegen, damit R nicht Letzter ist. Damit ergibt sich, dass der gesuchte Punkt außerhalb des großen orangenen, außerhalb des großen blauen und außerhalb des großen schwarzen Kreises liegen muss sowie zugleich zwischen den beiden grünen Kreisen, zwischen den beiden pinken Kreisen und zwischen den beiden violetten Kreisen liegen muss. Der einzige angegebenen Punkt, der diese Bedingungen erfüllt, ist Möglichkeit 5 (0.65 , 0.33).



3. Wenn wir die Notation der vorherigen Aufgabe verwenden (Iowa), ergibt sich Folgendes: R erhält prozentual $3 \cdot p_R + 2 \cdot p_B$ Punkte, B erhält $3 \cdot p_B + p_R$ Punkte und R' erhält $2 \cdot p_R + 1 \cdot p_B$ Punkte. R erhält also immer mehr Punkte als R' und auch mehr als B, wenn gilt, dass $2 \cdot p_R > p_B = 1 - p_R$. Dies ergibt als Lösung $p_R > \frac{1}{3}$.

4. Man kann die Aufgabe graphisch oder mit Hilfe des Satzes von Pythagoras lösen. Rot erhält einen Anteil von $0.2+0.1+0.2+0.15+0.05+0.1 = 0.8$, während Blau nur einen Anteil von $0.15+0.05+0.15+0.2+0.1 = 0.65$ erhält.

5. Der Abstand des Punktes (x, y) zum politischen Zentrum ist

$$d = d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es gilt für die Randpunkte

$$d(1, 1) = d(1, -1) = d(-1, 1) = d(-1, -1) = \sqrt{2}.$$

Wir suchen eine Geradengleichung $f(d) = ad + b$ mit $f(0) = 0.4$ und $f(\sqrt{2}) = 0$. Es ergibt sich $b = 0.4$ und $a = -\frac{0.4}{\sqrt{2}}$.

6. Es ergeben sich folgende Zustimmungsdistanzen:

$$\begin{aligned}
(0,0) &: f(d) = 0.4, \\
(-0.3,0.2) &: f(d) \approx 0.298 < 0.3, \\
(0.2,0.1) &: f(d) \approx 0.34, \\
(0.2,0.3) &: f(d) \approx 0.298, \\
(0.4,0.1) &: f(d) \approx 0.28 < 0.3, \\
(0.3,0.4) &: f(d) \approx 0.26, \\
(0.5,0.3) &: f(d) \approx 0.235, \\
(0.7,0.6) &: f(d) \approx 0.14.
\end{aligned}$$

Blau befindet sich in Zustimmungsdistanz der Punkte $(0,0)$, $(0.2,0.1)$ und $(0.2,0.3)$. Rot befindet sich in Zustimmungsdistanz der Punkte $(0.3,0.4)$, $(0.2,0.3)$ und $(0.5,0.3)$.

Blau erhält 0.40 $(5\% + 15\% + 20\%)$. Rot erhält ebenfalls 0.40 $(20\% + 10\% + 10\%)$.