Jede Stimme zählt, aber wie?

Was uns die Mathematik über Wahlen lehrt

Bonner Mathematikturnier

Radboud Universiteit

UNIVERSITÄT BONN

KU LEUVEN

Kapitel 1 Einleitung

Das Internationale Mathematikturnier besteht aus zwei Teilen: Der **Staffel** und dem **Sum of Us**. Beim Sum of Us steht jedes Mal eine Anwendung der Mathematik im Mittelpunkt. Dieses Jahr sind es **Wahlen** – ein sehr relevantes Thema, da ihr schon bald wählen dürft.

Unser Leben ist geprägt von Entscheidungen, die wir treffen. Von kleinen Dingen wie dem, was man zum Frühstück isst, bis hin zu großen Entscheidungen wie der Wahl des Studienfachs oder der Partei, die man an der Wahlurne wählt. Wir treffen bis zu 35 000 Entscheidungen pro Tag. Deshalb ist es wichtig, dass wir wissen, wie wir eine Wahl treffen und welche Auswirkungen verschiedene Wahlmethoden haben. Schließlich führt nicht jede Methode zum gleichen Ergebnis. Wir wollen hier eine mathematische Einführung in die verschiedenen Facetten einer Wahl geben.

Das vorliegende Material ist alles, was ihr braucht, um gut für den Sum of Us-Teil des Matheturniers gerüstet zu sein. Im ersten Abschnitt besprechen wir verschiedene Wahlsysteme. Dies meint verschiedene Verfahren, die bei einer Abstimmung eingesetzt werden. Interessanterweise liefert nicht jedes System das gleiche Ergebnis. Das bedeutet, dass das Wahlsystem selbst das Ergebnis beeinflussen kann. Jedes System hat seine Vor- und Nachteile. Dieser Abschnitt ist nicht nur auf Wahlen anwendbar, sondern auch im Alltag, wenn man eine Entscheidung treffen muss, zum Beispiel darüber, welchen Film man sich ansehen oder wohin man essen gehen will. So kann erreicht werden, dass möglichst viele Menschen mit dem Ergebnis zufrieden sind, auch wenn nicht jeder unbedingt seine erste Wahl erhält.

Im zweiten Teil geht es um Gerrymandering. Dies ist ein Phänomen, das hauptsächlich in den Vereinigten Staaten auftritt. Dort werden die Staaten für die Wahlen zum Repräsentantenhaus in Bezirke eingeteilt und jeder Bezirk wählt einen Vertreter. Gerrymandering bedeutet, dass Politiker die Wahlbezirksgrenzen neu ziehen, um die Wahlergebnisse zu beeinflussen. Wir wollen auch vereinfachte Methoden erörtern, mit denen genau geprüft werden kann, ob jemand die Stimmen künstlich gruppiert hat, um das Ergebnis zu beeinflussen. Gerrymandering ist ein sehr wichtiges Thema bei den Präsidentschaftswahlen in den USA und es steckt eine Menge faszinierender Mathematik dahinter.

Im Vorbereitungsmaterial befinden sich immer wieder Übungsaufgaben sowie am Ende des Materials auch deren Lösungen. Am Turniertag selbst dürfen dieses Material, ausgearbeitete Lösungen sowie ein **nicht-grafikfähiger und nicht-programmierbarer** Taschenrechner eingesetzt werden. Es wird jedoch dringend empfohlen, sich bereits im Voraus mit diesem Material genauer auseinanderzusetzen.

Das Material wurde von Carl Hart de Ruijter, Frodo Moonen und Jelle Vandersnickt, Studierenden der Mathematik an der KU Leuven, unter der Leitung von Joeri Van der Veken und Niels Bonneux erstellt.

Wir wünschen euch viel Spaß!

Die Organisatoren,
Joeri Van der Veken & Niels Bonneux (KU Leuven)
Peter Hochs (Radboud Universiteit Nijmegen)
Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2 Wahlsysteme

Bei vielen Wahlen, zum Beispiel bei Präsidentschaftswahlen, muss ein*e Gewinner*in anhand der Präferenzen der Wählenden ermittelt werden. Wenn es zwei Kandidierende gibt, ist das einfach. Aber was ist, wenn die Zahl der Kandidierenden größer ist? Wie können dann die Wünsche der Wählenden in ein gerechtes Wahlergebnis umgewandelt werden? Ein System, welches dies versucht, wird als Wahlsystem bezeichnet. In diesem Kapitel werden wir drei solcher Wahlsysteme besprechen.

2.1 Das Mehrheitsverfahren

Das Mehrheitsverfahren ist ein Abstimmungsverfahren, das euch wahrscheinlich bekannt vorkommen wird, da es im Alltag weit verbreitet ist.

Definition 2.1

Beim **Mehrheitsverfahren** hat jede*r Wähler*in eine Stimme. Die*der Gewinner*in ist die*der Kandidat*in mit den meisten Stimmen.

Beispiel 2.1

Angenommen, sechs Freund*innen wollen zusammen ins Kino gehen. Es gibt zwei mögliche Filme: Harry Potter und Shrek. Vier der Freund*innen wollen Shrek sehen, die beiden anderen Harry Potter. Wenn nach dem Mehrheitsverfahren gewählt wird, wird Shrek angeschaut.

☞ **Hinweis**

Beachtet, dass die*der Gewinner*in nicht die absolute Mehrheit benötigt, um zu gewinnen, wenn es mehr als zwei Kandidierende gibt. Mit der absoluten Mehrheit der Stimmen wird eine Wahl aber in jedem Fall gewonnen.

Bei den Wahlen des föderalen Parlamentes in Belgien können Wählende für verschiedene Parteien stimmen.[(1)] Die Partei mit den meisten Stimmen gewinnt die Wahl. Immer wenn nur eine Wahl getroffen wird, ist das zugrundeliegende Wahlsystem ein Mehrheitsverfahren.

Aufgabe 1. *Angenommen es gibt n Kandidierende. Welchen Prozentanteil der Stimmen muss ein*e einzelne*r Kandidat*in haben, um im Mehrheitsverfahren mit Sicherheit zu gewinnen? Hängt dieser Wert von n ab?*

Der große Vorteil dieses Systems liegt in seiner Einfachheit. Es ist sehr leicht, die*den Kandidat*in zu bestimmen, die*der hier gewinnt. Allerdings gibt es viele Nachteile, wenn es mehr als zwei Kandidierende gibt. Zum Beispiel wird nur die erste Wahl jeder wählenden Person berücksichtigt. Es könnte sein, dass jemand eine klare Präferenz hat, wen er am zweitliebsten wählen würde. Wenn man die*den Zweitplatzierten einer Wahl gewinnen lassen würde, könnten potentiell mehr Menschen mit dem Ergebnis zufrieden sein, als wenn nur die erste Wahl berücksichtigt wird. Angenommen, ihr würdet an einer Wahl teilnehmen, und eure favorisierte Person gewinnt diese nicht. Dann wäre es doch in eurem Interesse, dass sich nicht eine beliebige weitere Wahlmöglichkeit, sondern eure zweitliebste Wahlmöglichkeit

[(1)] Wählende können auch direkt für Personen stimmen, um diese zu wählen. Allerdings wird für die Bestimmung der siegreichen Partei nur die Partei der gewählten Person berücksichtigt.

durchsetzt. Indem ein*e Kandidat*in ausgewählt wird, die*der in der Rangliste vieler Wählender weit oben steht, wenn auch nicht unbedingt an erster Stelle, könnte man möglicherweise mehr Menschen zufrieden stellen als mit der Mehrheitsmethode.

Wir geben für beide Wahlsysteme nun einige Beispiele und vergleichen sie.

Beispiel 2.2

Eine Klasse mit fünf Schüler*innen stimmt darüber ab, welches ihr Lieblingsfach ist: Geschichte, Deutsch, Wirtschaft oder Mathe. Die Schüler*innen geben jeweils eine Präferenz unter allen in der Tabelle aufgeführten Fächern an. Bestimmt werden soll das beliebteste Fach dieser Gruppe:

Schüler*in	Amir	Jack	Eva	Sabrine	Chiara
Erste Wahl	Mathematik	Geschichte	Wirtschaft	Mathematik	Deutsch
Zweite Wahl	Geschichte	Deutsch	Deutsch	Geschichte	Geschichte
Dritte Wahl	Deutsch	Wirtschaft	Mathematik	Deutsch	Mathematik
Vierte Wahl	Wirtschaft	Mathematik	Geschichte	Wirtschaft	Wirtschaft

Bei der Mehrheitwahl zählt nur die erste Wahl. Wir sehen, dass Deutsch, Geschichte und Wirtschaft alle eine Stimme haben. Die Mathematik hat durch Amir und Sabrine zwei Stimmen. Mathe gewinnt also diese Wahl nach dem Mehrheitsverfahren. Wir sehen, dass Amir und Sabrine für alle Fächer genau die gleichen Präferenzen haben. Daher können wir diese Tabelle prägnanter darstellen, indem wir uns nicht auf die verschiedenen Personen, sondern auf die verschiedenen Präferenzmöglichkeiten konzentrieren. Im nächsten Beispiel zählen wir, wie viele Personen die gleiche Präferenz haben, und geben diese Zahl in der ersten Zeile anstelle der verschiedenen Namen an. Dies ist besonders nützlich, wenn man mit vielen Wählenden arbeitet. In diesem Beispiel würde dies die folgende Tabelle ergeben:

Anzahl Stimmen	2	1	1	1
Erste Wahl	Mathematik	Geschichte	Wirtschaft	Deutsch
Zweite Wahl	Geschichte	Deutsch	Deutsch	Geschichte
Dritte Wahl	Deutsch	Wirtschaft	Mathematik	Mathematik
Vierte Wahl	Wirtschaft	Mathematik	Geschichte	Wirtschaft

Die letzte Tabelle in diesem Beispiel wird als **Präferenztabelle** bezeichnet. In jeder Spalte muss jede Option einmal aufgeführt werden. Angenommen, es gibt drei Optionen A, B, C und wir wollen zählen, wie viele verschiedene Spalten wir haben können. Dann schauen wir uns zuerst an, wie viele verschiedene Möglichkeiten für den ersten Platz zur Verfügung stehen. Das sind so viele, wie wir Optionen haben, also 3. Als Nächstes schauen wir uns die Auswahlmöglichkeiten für den zweiten Platz an. Wir wissen, dass wir die erste Stelle nicht wiederholen können: Wenn wir A an erster Stelle haben, können wir nur zwischen B und C wählen. Dasselbe gilt, wenn wir B oder C an erster Stelle haben. Wir haben also $3 - 1 = 2$ Auswahlmöglichkeiten für den zweiten Platz. Für den dritten Platz dürfen wir keinen der ersten beiden Plätze wiederholen. Wenn wir also A an erster Stelle und C an zweiter Stelle haben, dann muss B an dritter Stelle stehen. Wir haben also nur noch 1 Möglichkeit. Insgesamt haben wir dann $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

Beispiel 2.3

Die Tabelle enthält die Präferenzen der Wählenden. Diesmal sind die Daten nach den Präferenzen geordnet. Jede Spalte steht für eine Präferenz mit einer ersten, zweiten, dritten und vierten Wahl. Der obere Teil der Spalte zeigt, wie viele Personen diese Präferenz haben. Auf diese Weise können wir die Präferenzen vieler Menschen kurz und bündig darstellen.

Anzahl Stimmen	11	5	5	2
Erste Wahl	A	C	C	D
Zweite Wahl	C	D	B	B
Dritte Wahl	D	B	D	A
Vierte Wahl	B	A	A	C

Beim Mehrheitsverfahren zählt nur die erste Wahl, die übrigen werden ignoriert. Wir sehen, dass A 11 Stimmen erhält, C 10 und D 2. In diesem Beispiel gewinnt Kandidierender A die Wahl.

Beispiel 2.4

Auch in dieser Tabelle sind die Präferenzen der Wählenden angegeben. Beim Mehrheitsverfahren zählt nur die erste Wahl, der Rest wird ignoriert. In diesem Beispiel gewinnt daher ebenso Kandidat*in A die Wahl. Schaut euch nun die anderen Wahlmöglichkeiten genauer an. Seid ihr der Meinung, dass Kandidat*in A die bessere Wahl ist, wenn ihr euch auch die anderen Präferenzen anseht? Repräsentiert A die Meinung der meisten Menschen?

Anzahl Stimmen	25	19	12	5
Erste Wahl	A	B	C	B
Zweite Wahl	D	C	B	D
Dritte Wahl	B	D	D	C
Vierte Wahl	C	A	A	A

Bei den Beispielen ist es einfach, die*den Gewinner*in nur aus der ersten Wahl zu bestimmen. Bei mehreren Kandidierenden kann es jedoch sinnvoll sein, auch andere Möglichkeiten in Betracht zu ziehen. Schauen wir uns noch einmal Beispiel 2.3 an. Dort sehen wir, dass Kandidat*in A mit 11 Stimmen gewinnt, aber diese*r Kandidat*in steht in der Rangliste der anderen 12 Wählenden überhaupt nicht weit oben. Man kann also auch Kandidat*in C als Gewinner*in in Betracht ziehen, da sie*er 10 Erststimmen und 11 Zweitstimmen erhalten hat.

2.2 Paarweises Mehrheitsverfahren

Aus den Beispielen im vorigen Abschnitt geht hervor, dass eine einzige Stimme manchmal nicht ausreicht. Um dem entgegenzuwirken, kann ein Präferenzsystem eingeführt werden. In einem solchen System wählen die Wählenden nicht nur ihre erste Wahl, sondern geben ihre Präferenz in Form einer Rangfolge an. Diese Kandidierendenrangfolge ist ein Beispiel für eine *geordnete Menge*.

Wir können uns die Gruppe aller Kandidierenden bei einer Wahl als eine Menge vorstellen. Diese beinhaltet alle Kandidierenden, für die die Wählenden ihre Stimme abgeben können. Angenommen, man könnte zwischen Äpfel und Birnen wählen. Dann wäre die sich daraus ergebene Menge $\{\text{Äpfel}, \text{Birnen}\}$. Bei einer Wahl mit drei Kandidierenden könnte $\{A, B, C\}$ die zugehörige Menge sein.

Bei der Stimmabgabe haben die Wählenden natürlich Präferenzen für die in einer Menge vorliegenden Kandidierenden, die wir daher nach persönlichen Präferenzen sortieren können. Angenommen, Jos bevorzugt Kandidat*in A gegenüber Kandidat*in B, dann könnnen wir dies als $A \succ B$ oder $B \prec A$ darstellen. Wir können dies nun für jede*n Wähler*in tun. Dabei verdeutlichen die Operatoren $\succ$ und $\prec$ die Richtung der Reihenfolge.(2)

Um mit dieser Ordnung der Präferenzen arbeiten zu können benötigen wir zwei Annahmen: Die Präferenzen sind vollständig und transitiv.

Definition 2.2

Eine Präferenz ist **vollständig**, wenn es eine Präferenzbeziehung zwischen allen Kandidierenden gibt. Ein*e Wähler*in soll also für jede beliebige Wahl zweier Kandidierenden sagen können, wen sie*er bevorzugt.

Diese Annahme bedeutet insbesondere, dass ein*e Wähler*in keine zwei Kandidierenden gleich stellen darf, sondern eine echte Präferenz für *je zwei beliebige Kandidierende* angeben muss.

Beispiel 2.5

Angenommen Josefien muss ihre Präferenzen in einem vollständigen Präferenzsystem mit Kandidierenden $\{A, B, C\}$ angeben. Dann muss sie bei jedem denkbaren Kandidierendenpaar eine Wahl treffen. Zum Beispiel kann sie feststellen, dass für sie $A \succ B$, $B \succ C$ und $A \succ C$ gilt. Es genügt aber nicht zu sagen, dass für sie $A \succ B$ und $A \succ C$ gilt, denn dann wissen wir nicht, ob Josefien B oder C bevorzugt.

Die zweite Annahme, die wir machen, ist die Transitivität der Präferenzordnung.

Definition 2.3

Eine Präferenz zwischen Optionen heißt **transitiv**, wenn aus $A \succ B$ und $B \succ C$ folgt, dass $A \succ C$.

Diese Annahme erscheint sehr natürlich. Wir wollen uns das an einem Beispiel anschauen.

Beispiel 2.6

Wenn Amanda Äpfel lieber als Birnen und Birnen lieber als Bananen mag, dann wird sie auch Äpfel lieber mögen als Bananen. Das kann man auch mit entsprechenden Zeichen ausdrücken: Falls $b \succ a$ und $c \succ b$, dann wird auch $c \succ a$ gelten. Übertragen wir dies auf das Präferenzsystem,

(2) Man erkennt eine Ähnlichkeit zu den Symbolen für größer ($>$) und kleiner ($<$). Das ist kein Zufall, denn der Vergleich der Größen von Zahlen ist auch eine Ordnung auf einer Menge. Die zugrundeliegende Menge ist dann $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Z}$, oder $\mathbb{N}$,...) und die Ordnung auf dieser Menge die Größe der Zahlen.

so bedeutet dies, dass wir verlangen, dass ein*e Wähler*in, die*der Kandidat*in B Kandidat*in A vorzieht und Kandidat*in A wiederum gegenüber Kandidat*in C bevorzugt, auch lieber Kandidat*in B statt Kandidat*in C wählt.

☞ **Hinweis**
Von nun an werden wir davon ausgehen, dass wir immer mit vollständigen und transitiven Präferenzen arbeiten. Dies ermöglicht es uns, eine vollständige Rangfolge aller Kandidierenden für jede*n Wähler*in aufzustellen.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Beispiele sind vollständig und/oder transitiv?

- Teilbarkeit von Zahlen. Eine Zahl $a \in N$ teilt eine Zahl $b \in N$ wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass $a \cdot n = b$.
- Die 'kleiner/gleich' ($\leq$) Beziehung zwischen zwei reellen Zahlen.
- Das Spiel Schere-Stein-Papier. Hier können die beiden Spieler*innen zwischen den Optionen 'Schere', 'Stein' und 'Papier' entscheiden. 'Papier' schlägt 'Stein', 'Stein' schlägt 'Schere' und 'Schere' besiegt 'Papier'.

Die Nachteile des Mehrheitsverfahrens lassen sich durch das folgende System weitgehend vermeiden. Dieses System konzentriert sich auf die Reihenfolge zwischen den einzelnen Anwärter*innen und nicht auf den spezifischen Platz in der Präferenzliste. Die Auswertung des Ergebnisses ist dafür mit deutlich mehr Arbeit als bei dem Mehrheitsverfahren verbunden. Wir nennen dieses System paarweises Mehrheitsverfahren.

Definition 2.4
Das **paarweise Mehrheitsverfahren** zählt die Stimmen so, dass am Ende die*der Kandidat*in gewinnt, die*der die meisten relativen Präferenzen gegenüber allen anderen kandidierenden Menschen hat. Die siegreiche Person wird als **Condorcet-Sieger*in** bezeichnet.

☞ **Hinweis**
Der Begriff Condorcet-Sieger*in stammt vom französischen Mathematiker und Philosophen Nicolas de Condorcet[a]. Er lebte während der französischen Revolution und war ein großer Befürworter der Ideen der Aufklärung, wie beispielsweise der Gleichheit aller Menschen ungeachtet von Geschlecht und Hautfarbe. Später wurde er von Revolutionären verhaftet, weil er die französische Verfassung von 1793 kritisierte. Wenig später wurde er tot in seiner Zelle aufgefunden. Seine Vorstellungen von Gleichheit finden sich in einem Paarsystem wieder, bei dem jede Wahl den gleichen Wert gegenüber allen anderen Wahlen hat. Er war ein so großer Befürworter dieses Systems, dass es später seinen Namen erhielt.

[a] Sein vollständiger Name ist eigentlich Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, Marquis de Condorcet.

Wie wenden wir das paarweise Mehrheitsverfahren an? Alle Kandidierenden werden direkt mit jeder anderen kandidierenden Person verglichen. Wir zählen in der Präferenztabelle, wie oft die*der eine Kandidat*in über die*den andere*n gesetzt wurde. Diejenige Person, die im Duell öfters gewählt wurde, erhält einen Punkt. Nach dem Vergleich aller Kandidierenden gewinnt die Person mit den meisten Punkten. Diese Methode erscheint auf den ersten Blick recht kompliziert, wird aber anhand einiger Beispiele schnell verständlich.

Beispiel 2.7

Anzahl Stimmen	12	7	3
Erste Wahl	A	B	C
Zweite Wahl	C	C	B
Dritte Wahl	B	A	A

Sehen wir uns die Tabelle an. Wir werden versuchen die*den Gewinner*in dieser Präferenztabelle zu ermitteln. Wir beginnen mit A und C und zählen dafür zunächst, wie oft $A \succ C$ vorliegt. In der ersten Spalte sehen wir diese Relation an den Plätzen 1 und 2. Wir müssen hier natürlich beachten, wie viele Personen diese Präferenzreihenfolge gewählt haben. Hier sind es 12. Nun müssen wir schauen, wie oft $C \succ A$ gilt. Wir schauen zunächst in die mittlere Spalte. Hier gilt 7 mal $C \succ A$. In der dritten Spalte ergibt sich ebenfalls $C \succ A$, da die Anordnung transitiv ist und somit aus $C \succ B$ und $B \succ A$ auch $C \succ A$ folgt. Wir sehen, dass die geforderte Transitivität hier essentiell ist. Insgesamt haben wir 10 mal $C \succ A$. Es wurde also öfters A gegenüber C präferiert. Kandidat*in A erhält daher einen Punkt, Kandidat*in C dagegen keinen.

Wir wiederholen dieses Verfahren nun für B und C und sehen, dass in den ersten und letzten Spalten insgesamt 15 mal $C \succ B$ festgelegt wird, während in der mittleren Spalte 7 Personen $B \succ C$ wählen. C gewinnt also gegen B und erhält den Punkt.

Schließlich müssen wir noch A und B vergleichen. Wir sehen, dass 12 Personen A gegenüber B und 10 Personen B gegenüber A bevorzugen. Kandidat*in A erhält also einen weiteren Punkt. Insgesamt hat A nun zwei Punkte, C einen Punkt und B keinen. Bei Anwendung dieser Methode geht A als Sieger*in hervor.

Das folgende Beispiel zeigt uns, dass nicht jedes Wahlsystem die*den gleichen Gewinner*in ermittelt.

Beispiel 2.8

Anzahl Stimmen	12	11	3
Erste Wahl	A	C	B
Zweite Wahl	B	B	C
Dritte Wahl	C	A	A

Die Tabelle zeigt die Präferenzen von 26 Personen. Bei dem Mehrheitsverfahren müssen wir uns nur die erste Option ansehen. A gewinnt demnach diese Wahl.

Nun betrachten wir das paarweise Mehrheitsverfahren. Wir vergleichen jeweils zwei Kandidierende und zählen die Punkte. Wir sehen, dass für 12 Personen $A \succ B$ und 14 Personen $B \succ A$, für 15 Personen $B \succ C$ und 11 Personen $C \succ B$, und schließlich für 12 Personen $A \succ C$ und 14 Personen $C \succ A$ gilt. Aus diesem Verfahren geht daher B als Sieger*in hervor.

Diese Methode hat einige Vorteile. Indem sie die gesamte Anordnung der Kandidierenden berücksichtigt, wirkt sie einer Polarisierung entgegen. Polarisierung ist ein politisches Phänomen, bei dem extreme Parteien (wie die extreme Linke oder die extreme Rechte) aufgrund der Unzufriedenheit der Menschen immer mehr Stimmen gewinnen. Da eine vollständige Anordnung erforderlich ist, werden die Menschen gezwungen, auch gemäßigte Parteien aufzulisten und sich zwischen diesen zu entscheiden. Somit werden diese Präferenzen auch berücksichtigt.

Dieses System stellt sicher, dass für Menschen zumindest ein Teil ihrer Präferenz wiedergegeben wird. Auch wenn vielleicht nicht die*der Lieblingskandidat*in einer Person gewinnt, ist es möglich, dass sich am Ende ein*e Kandidat*in durchsetzt, die*der bei vielen Menschen weit oben in der Präferenzliste stand. Wir stellen auch fest, dass ein*e Kandidat*in, die*der die absolute Mehrheit der Stimmen erhält, natürlich auch nach dem paarweisen Mehrheitsverfahren gewinnt, denn sie*er gewinnt logischerweise alle Duelle. In diesem Fall stimmen also die beiden betrachteten Methoden überein.

Beispiel 2.9

Anzahl Stimmen	25	19	12	5
Erstes Wahl	A	B	C	B
Zweites Wahl	D	C	B	D
Drittes Wahl	B	D	D	C
Viertes Wahl	C	A	A	A

Wir betrachten Beispiel 1.4 unter dem paarweisen Mehrheitsverfahren. Dazu müssen wir jeweils zwei Kandidierende miteinander vergleichen. Wir beginnen mit A und B. Aus der ersten Spalte erkennen wir, dass 25 Personen $A \succ B$ setzen. In den anderen drei Spalten ist $B \succ A$. Dies sind insgesamt 36 Personen, sodass B einen Punkt erhält und A nicht. Jetzt schauen wir uns A und C an. Wir sehen wieder, dass nur in der ersten Spalte $A \succ C$ gilt, während in den anderen drei Spalten $C \succ A$ gilt. C erhält also diesen Punkt. Dann vergleichen wir A und D. Wieder sind wir im gleichen Szenario, sodass D diesen Punkt erhält und A wieder leer ausgeht.

Jetzt müssen wir B mit den weiteren Kandidierenden vergleichen. Da wir schon A mit B verglichen haben, können wir mit B und C beginnen. In den ersten beiden Spalten und der vierten Spalte gilt $B \succ C$. Dies sind insgesamt 49 Wählende. In der dritten Spalte gilt $C \succ B$. Dies sind jedoch nur 12 Stimmen, sodass B einen weiteren Punkt erhält. Nun vergleichen wir B und D. Nur in der ersten Spalte gilt $D \succ B$. Es gibt 25 Wählende, die $D \succ B$ setzen, und 36 Stimmen, die $B \succ D$ angegeben haben. B erhält somit noch einen dritten Punkt. Abschließend vergleichen wir C und D. In der ersten und vierten Spalte erkennen wir $D \succ C$. Das sind 30 Stimmen und damit eine Stimme weniger als, summiert in den Spalten 2 und 3, $C \succ D$ angegeben haben. C erhält somit einen zweiten Punkt.

Insgesamt erhält B also drei Punkte, C zwei Punkte, D einen Punkt und A keinen einzigen. Dieses Ergebnis unterscheidet sich vollständig von dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten Mehrheitsverfahren. Dort würde Kandidat*in A gewinnen, die*der hier an letzter Stelle steht.

2.3 Das Borda-Verfahren

Das Borda-Verfahren betrachtet die Präferenzen auf eine andere Weise. Es berücksichtigt nur die Position der Kandidierenden, nicht aber die relative Position der Kandidierenden untereinander. Das Verfahren versucht zuallererst, die Wahrscheinlichkeit zu minimieren, dass ein*e Ausreißer*in (wie die*der Kandidat*in A in Beispiel 2.4) die Wahl gewinnt. Dies steht im Gegensatz zum paarweisen Mehrheitsverfahren. Diese Methode versucht in erster Linie, die Wahrscheinlichkeit zu minimieren, dass ein*e Kandidat*in gewinnt, die*der gegenüber seinen Gegner*innen relativ verliert.[3]

Definition 2.5

Im **Borda-Verfahren** gibt jede*r Wähler*in eine vollständige Rangfolge an. Wenn es n Kandidierende gibt, so erhält die erste Präferenz n Punkte und die zweite Präferenz $n-1$ Punkte. Diese absteigende Bepunktung wird fortgesetzt, bis die*der Kandidat*in mit der niedrigsten Präferenz nur noch einen Punkt erhält. Die kandidierende Person mit den meisten Punkten gewinnt die Wahl.

Wir erklären diese Definition ein wenig genauer. Angenommen es gibt vier Kandidierende $\{A, B, C, D\}$. In diesem Fall ist $n = 4$. Amanda bevorzugt $A \succ B \succ C \succ D$. A steht an erster Stelle, diese*r Kandidat*in erhält also vier Punkte. Kandidat*in B steht bei Amanda an zweiter Stelle und erhält $n-1=3$ Punkte. Danach erhält Kandidat*in C, die*der an dritter Stelle steht, $4-2=2$ Punkte. Die*der an der letzten Stelle stehende Kandidat*in D erhält nur einen Punkt. Dieses Verfahren wird nun für alle Wählenden angewandt und die jeweiligen Punktzahlen zu einem Gesamtergebnis addiert.

Beispiel 2.10

Anzahl Stimmen	100	73	25
Erste Wahl	A	C	A
Zweite Wahl	C	B	B
Dritte Wahl	B	A	C

Die Tabelle zeigt die Präferenzen von 198 Wählenden bei drei Kandidierenden $\{A, B, C\}$. Wir wenden nun das Borda-Verfahren an. Wir haben 3 Optionen, also wissen wir, dass der erste Platz drei Punkte erhält, der zweite Platz noch zwei Punkte und der dritte Platz einen. Wir sehen, dass 125 Wählende insgesamt die Option A an erster Stelle setzten. Das gibt bereits 375 Punkte für A. 73 Personen setzten C an die erste Stelle, das sind 219 Punkte. Für die zweiten und dritten Plätze gehen wir analog vor. Insgesamt erhalten wir, dass A 448 Punkte hat, B 296 Punkte und C 444 Punkte. Somit ist A die*der Gewinner*in nach diesem Verfahren.

[3] Diese Bedingung wird manchmal auch als Condorcet-Kriterium bezeichnet.

Beispiel 2.11

Anzahl Stimmen	25	19	12	5
Erste Wahl	A	B	C	B
Zweite Wahl	D	C	B	D
Dritte Wahl	B	D	D	C
Vierte Wahl	C	A	A	A

Wir schauen uns noch einmal Beispiel 2.4 an, diesmal jedoch mit dem Borda-Verfahren. Wir haben bereits gesehen, dass nach dem Mehrheitsverfahren Kandidat*in A gewinnt. Die*der Condorcet-Sieger*in dagegen war B, und A landete dabei sogar auf dem letzten Platz.

Wir haben vier Kandidierende. Der erste Platz erhält daher vier Punkte, der zweite Platz drei Punkte, der dritte Platz zwei Punkte und der letzte Platz einen Punkt. Somit können wir für jede*n Kandidat*in eine Gesamtpunktzahl ermitteln, indem wir in jeder Spalte die Punktzahl der Position mit der Anzahl der Personen multiplizieren. Zuerst schauen wir uns Kandidat*in A an. Wir sehen, dass diese*r in der ersten Spalte an erster Stelle steht und in allen anderen Spalten an der letzten Stelle. A erhält also insgesamt $25 \cdot 4 + 19 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 136$ Punkte. Für B erhalten wir $25 \cdot 2 + 19 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 182$ Punkte. Kandidat*in C erreicht $25 \cdot 1 + 19 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 140$ Punkte, während D insgesamt $25 \cdot 3 + 19 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 152$ Punkte erhält. Mit dem Borda-Verfahren gewinnt also Kandidat*in B, Platz zwei geht an D, Dritte*r wird C und wie beim paarweisen Mehrheitsverfahren landet Kandidat*in A auf dem letzten Platz.

Warum sollten wir das Borda-Verfahren verwenden? Wie beim paarweisen Mehrheitsverfahren hat auch dieses Verfahren den Vorteil, dass die gesamte Ordnung berücksichtigt wird und somit den Wählenden die Möglichkeit gegeben wird, ihre Präferenzen deutlicher zum Ausdruck zu bringen. Auf der anderen Seite macht es das Auszählen der Stimmen viel schwieriger. Das vorherige Beispiel erforderte bereits einige Berechnungen. Darüber hinaus führt das Borda-Verfahren manchmal zu nicht-intuitiven Ergebnissen. Ein*e Kandidierende*r, die*der nach dem Mehrheitsverfahren die absolute Mehrheit hat, gewinnt bei dem hier vorgestellten Verfahren nicht immer (siehe Aufgaben). Dennoch wird sie von einigen Organisationen verwendet , wie beispielsweise der 'International Society of Cryobiology'. Auch bei der Stimmenauswertung des Eurovision Song Contests wird das Borda-Verfahren in angepasster Form eingesetzt.

Aufgabe 3. *Stellt euch vor, es gibt* 50 *Wählende und* 3 *Kandidierende. Beantwortet die folgenden Fragen zum Borda-Verfahren.*

- ✿ *Was ist die maximale Punktzahl, die ein*e Kandidat*in erreichen kann?*
- ✿ *Was ist die minimale Punktzahl, die ein*e Kandidat*in in jedem Fall erzielt?*
- ✿ *Wie viele Punkte werden insgesamt verteilt?*

Beispiel 2.12

Wir wollen abschließend ein Beispiel geben, in welchem alle drei Methoden betrachtet werden.

Anzahl Stimmen	27	21	17	12	9	6
Erste Wahl	A	C	B	A	C	B
Zweite Wahl	B	B	A	C	A	C
Dritte Wahl	C	A	C	B	B	A

In der oben aufgeführten Tabelle wurden alle möglichen Kombinationen zwischen den drei Kandidierenden und deren jeweilige Stimmenanzahl angegeben. Insgesamt gibt es 92 Wählende. Schaut euch die Tabelle zunächst an, ohne eine Methode anzuwenden. Wer, glaubt ihr, gewinnt die Wahl?

Wir beginnen mit der Mehrheitswahlmethode. Die erste Wahl zeigt, dass Kandidat*in A mit 39 Stimmen gewinnt. Das ist keine absolute Mehrheit. An zweiter Stelle landet Kandidat*in C mit 30 Stimmen, auf die*den letztplatzierten B fallen nur 23 Stimmen. Nach dem Mehrheitsverfahren gilt daher $A \succ C \succ B$.

Wir wenden nun das paarweise Mehrheitsverfahren an. Wir vergleichen zunächst A und B. Wir sehen, dass 48 Wählende $A \succ B$ eingestuft haben. Für 44 Wählende gilt wiederum $B \succ A$, so dass Kandidat*in A einen Punkt erhält. Wir vergleichen nun A und C und erhalten 56 mal $A \succ C$ sowie 36 mal $C \succ A$. Somit erhält A einen weiteren Punkt. Wir erkennen bereits an dieser Stelle, dass Kandidat*in A nach dieser Methode gewinnt.

Wir betrachten dennoch den letzten Vergleich zwischen B und C. Da 50 Personen $B \succ C$ und nur 42 Personen $C \succ B$ angegeben haben, erhält Kandidat*in B einen Punkt, so dass nach dem paarweisen Mehrheitsverfahren $A \succ B \succ C$ gilt.

Wir betrachten das Beispiel nun noch mit der Borda-Methode. Wir berechnen dafür die Punktzahlen der einzelnen Kandidierenden. Für Kandidat*in A erhalten wir $27 \cdot 3 + 21 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 196$ Punkte. Für Kandidat*in B ergeben sich $27 \cdot 2 + 21 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 186$ Punkte. Kandidat*in C wiederum kommt auf $27 \cdot 1 + 21 \cdot 3 + 17 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 170$ Punkte. Nach dem Borda-Verfahren ergibt sich $A \succ B \succ C$.

In jedem dieser Verfahren geht in diesem Beispiel A als Sieger*in hervor. Allerdings sind der zweite und dritte Platz nicht überall gleich. Die gewählte Methode beeinflusst somit möglicherweise – aber nicht zwingend – die*den Sieger*in, kann aber auch die dahinter folgenden Platzierungen variieren.

2.4 Übungen

Aufgabe 4. *Angenommen, es gibt vier Kandidierende bei einer Wahl* $\{A, B, C, D\}$. *Wie viele Kombinationen für die Reihenfolge der Platzierungen sind möglich? Könnt ihr diese Aussage für die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten für* n *Kandidierende verallgemeinern?*

Aufgabe 5. *Wir haben nun verschiedene Wahlsysteme mit entsprechenden Beispielen gesehen. Bestimmt die Wahlergebnisse für die einzelnen Beispiele auch mit den jeweils anderen Methoden.*

Aufgabe 6. *Es gebe* 4 *Kandidierende und* 10 *Wählende. Wie oft muss Kandidat*in* A *mindestens auf Rang* 1 *gewählt werden, um sicher mit dem Borda-Verfahren zu gewinnen?*

Aufgabe 7. *Angenommen, Kandidat*in* B *erhält die absolute Mehrheit bei einer Wahl zwischen drei Kandidierenden* $\{A, B, C\}$. *Finde ein Beispiel dafür, dass* B *mit dem Borda-Verfahren die Wahl nicht gewinnt.*

Aufgabe 8. *Beim Borda-Verfahren erhält die kandidierende Person auf dem letzten Platz einen Punkt. Um die Rechnungen zu vereinfachen, könnte man auch keinen Punkt für den letzten Platz vergeben. Wie viele Punkte erhielte dann die*der erstplatzierte Kandidat*in, wenn es insgesamt* n *Wahlmöglichkeiten gibt? Was ist mit der*dem* m*-Platzierten, wie viele Punkte erhielte diese*r dann?*

Aufgabe 9. *Welches System findest du am fairsten? Hängt das fairste System vom Kontext ab? Sollte der Eurovision Song Contest das gleiche System wie die meisten politischen Wahlen haben, also ein Mehrheitsverfahren? Gibt es ein optimales System, das deiner Meinung nach in allen Szenarien verwendet werden kann?*

Kapitel 3 Gerrymandering

3.1 Einleitung

Alle vier Jahre wählen die Bürger*innen der Vereinigten Staaten eine*n neue*n Präsident*in. Die Mitglieder des Repräsentantenhauses werden alle zwei Jahre gewählt. Das Repräsentantenhaus hat insgesamt 435 Mitglieder und jeder Bundesstaat ist mit mindestens einem Mitglied vertreten. Je nach Einwohnerzahl erhalten die jeweiligen Staaten mehr Sitze. Um die korrekte Zahl zu ermitteln, führt das United States Census Bureau alle zehn Jahre eine Volkszählung durch. Sobald die genaue Zahl an Abgeordneten feststeht, werden die Staaten in Bezirke mit gleicher Einwohnerzahl eingeteilt. In Wahlen wird dann ein*e Vertreter*in pro Bezirk gewählt. Aber wer entscheidet, wo die Bezirke genau liegen? In 37 der 50 Bundesstaaten werden die Grenzen der Bezirke von Politiker*innen gezogen, was zur Folge hat, dass sie manchmal eine bemerkenswerte Form annehmen. Dies könnt ihr zum Beispiel in den folgenden Abbildungen sehen. Die grünen Teile bilden einen Bezirk.

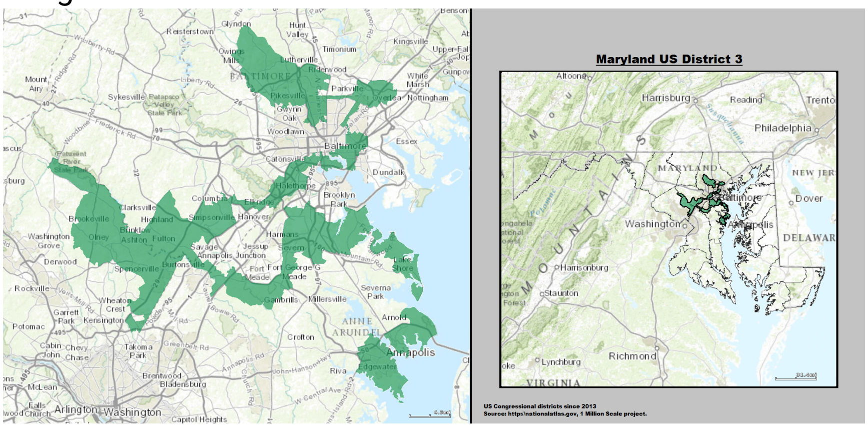


Abbildung 3.1. Bezirk 3 von Maryland (2013)

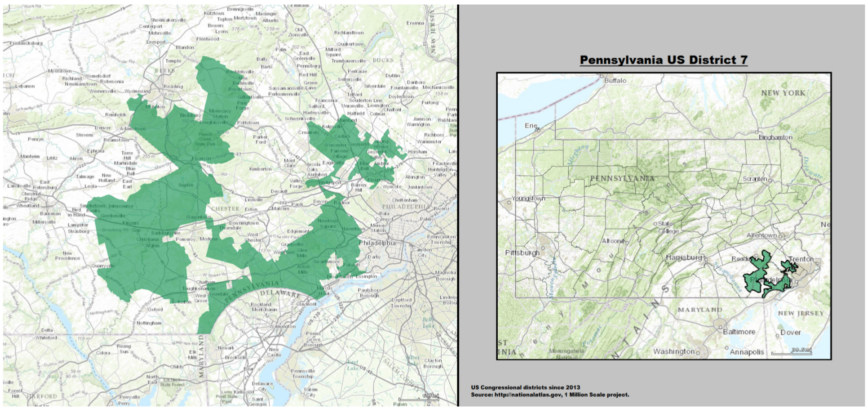
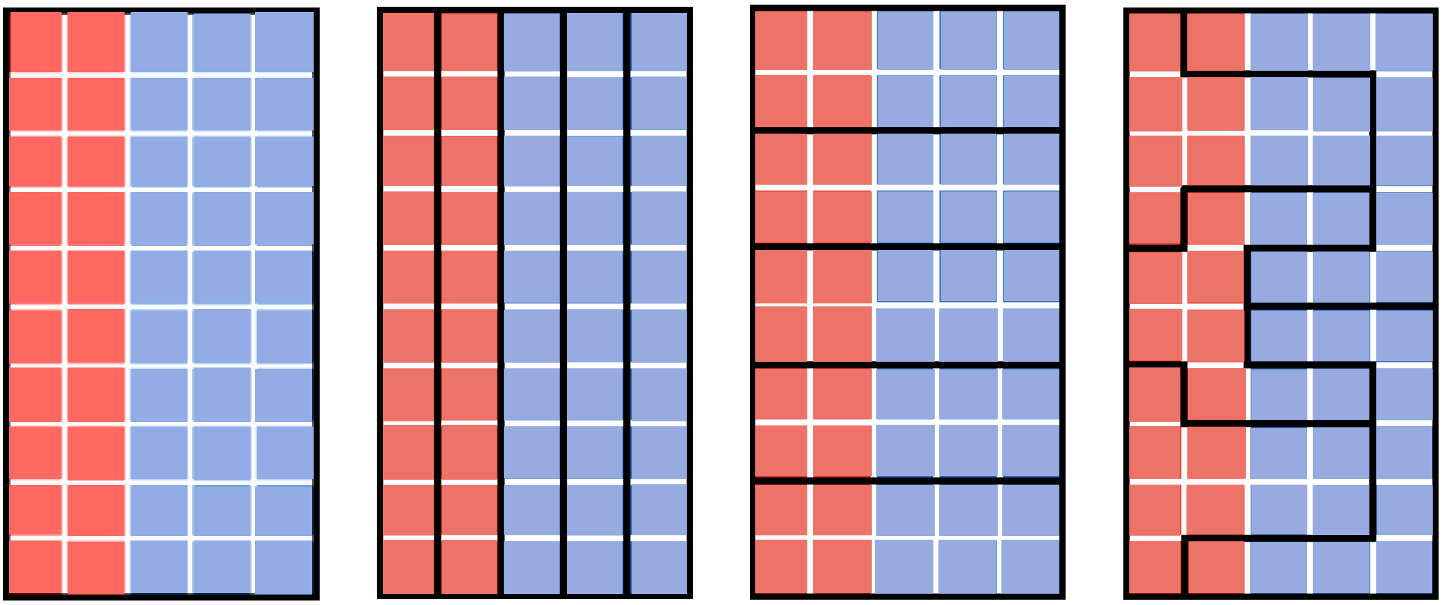


Abbildung 3.2. Bezirk 7 von Pennsylvania (2013). Wegen seiner eigenartigen Form wird dieses Viertel auch „Goofy Kicking Donald Duck“ genannt.

Die Neueinteilung von Wahlbezirken, um Wahlergebnisse bewusst zu beeinflussen, bezeichnet man als *Gerrymandering*. Im folgenden Beispiel werden 50 Einwohner*innen, von denen 30 für die blaue Partei und 20 für die rote Partei stimmen, in fünf Bezirke aufgeteilt. Je nachdem, wie wir die Bezirke ziehen, ändert sich das Ergebnis. Sowohl die blaue Partei als auch die rote Partei können die Mehrheit der Bezirke gewinnen.



(a). 40% wählen rot, 60% blau. (b). rot gewinnt 2, blau 3 Bezirke. (c). rot gewinnt 0, blau 5 Bezirke. (d). rot gewinnt 3, blau 2 Bezirke.

Abbildung 3.3. Der Einfluss von Gerrymandering.

In diesem Kapitel wird erörtert, wie man optimal *gerrymandern* kann und welche Auswirkungen dies hat. Anschließend behandeln wir einige Methoden, wie man Gerrymandering aufdecken kann.

3.2 Optimales Gerrymandering

3.2.1 Modell und Notation

Nehmen wir an, es gibt einen Staat, in dem nur zwei Parteien antreten: die blaue Partei und die rote Partei. Wir nehmen an, dass wir genau wissen, für welche Partei jede Person stimmen wird. Wir kennen also den Anteil der Wählenden für die blaue Partei und bezeichnen ihn mit p, wobei $p \in [0, 1]$. Der Anteil der Wählenden für die rote Partei ist dann $1 - p$. Nehmen wir an, wir müssen den Staat in N Bezirke mit gleicher Einwohnerzahl unterteilen. Für jeden Bezirk können wir wiederum den Anteil der Wählenden für die blaue Partei bestimmen. Für den Bezirk i mit $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ nennen wir den Anteil p_i. Wir sagen, dass die blaue Partei den Bezirk i gewinnt, wenn $p_i \geq 0.5$. Wir verwenden hier also das Mehrheitsprinzip aus Kapitel 2, aber mit der zusätzlichen Regel, dass die blaue Partei auch im Falle eines Gleichstands gewinnt. Die Zahl der Bezirke, die die blaue Partei gewinnt, wird mit S bezeichnet. Es ist $S = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i)$ die Anzahl der Bezirke, in denen mindestens die Hälfte der Wählenden für die blaue Partei stimmt. Trivialerweise ist $0 \leq S \leq N$.

☞ **Hinweis**
In dieser Notation verwenden wir ein Summenzeichen und eine Indikatorfunktion. Das Summenzeichen, dargestellt durch ein groß geschriebenes Sigma Σ, wir verwendet, um eine lange Summe einfach zu notieren. Unter dem Sigma steht der Index (normalerweise i) mit dem zugehörigen Startwert. Der Wert des Index läuft von diesem Startwert bis zum Endwert, der oberhalb des Sigmas

notiert wird. Wenn wir die Summe vollständig ausschreiben, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i) = \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_1) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_2) + \ldots + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_N).$$

Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}$ ist eine Funktion, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Die Funktion zeigt an, ob das Argument (der Wert, den man in die Funktion eingibt), in einer bestimmten Menge ist (1) oder nicht (0). Für eine Menge A gilt also, dass

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Für unser Beispiel prüft die Funktion $\mathbb{1}_{[0.5,1]}$, ob p_i im Intervall $[0.5, 1]$ liegt oder nicht. Wenn $p_i \geq 0.5$, dann liefert die Indikatorfunktion den Wert 1. Ist $p_i < 0.5$, so liefert sie den Wert 0. Die Summe $\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i)$ ist also eine Addition von Einsen und Nullen, wobei ein Summand den Wert 1 annimmt, wenn die blaue Partei in dem entsprechenden Bezirk gewinnt, und 0, wenn sie verliert.

Beispiel 3.1

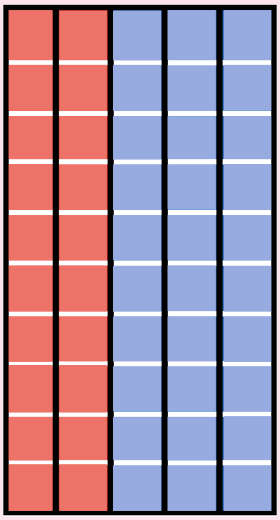


Abbildung 3.4. Rot gewinnt zwei, blau drei Bezirke.

In dieser Situation gibt es 50 Personen, von denen 20 für die rote Partei und 30 für die blaue Partei stimmen. Hier ist $p = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6$ und $1 - p = 0.4$. Die 50 Personen werden in fünf Bezirke aufgeteilt, also $N = 5$. Die Anzahl der Personen pro Bezirk ist somit 10. Wir nummerieren die Bezirke von links nach rechts von 1 bis 5. Im Bezirk 1 wählen alle 10 Personen die rote Partei. Daraus folgt $p_1 = \frac{0}{10} = 0$. Das Gleiche gilt für Bezirk 2. In den Bezirken 3, 4 und 5 wiederum stimmen jeweils 10 von 10 Personen für die blaue Partei, was wir als $p_3 = p_4 = p_5 = \frac{10}{10} = 1$ aufschreiben können. Jetzt können wir S berechnen, also die Anzahl der Bezirke, in denen die blaue

Partei gewinnt:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i) \\
&= \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_1) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_2) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_3) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_4) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_5) \\
&= \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(1) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(1) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(1) \\
&= 0 + 0 + 1 + 1 + 1 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Wenn wir für die blaue Partei gerrymandern, dann versuchen wir durch die Neuziehung von Bezirken die blaue Partei in so vielen Bezirken wie möglich gewinnen zu lassen. Die Neueinteilung der Bezirke läuft darauf hinaus, die Werte der p_i's zu optimieren. Leider können wir nicht so einfach jeden Wert für diese p_i's bestimmen. Eine wichtige Einschränkung für die Werte ist, dass:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = p. \tag{3.1}$$

Wir können schnell sehen, dass diese Gleichheit gelten muss, indem wir beide Seiten mit der Anzahl der Personen im Staat multiplizieren. Wir bezeichnen diese Anzahl von Personen mit V. Wir erhalten dann: $\frac{V}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = V \cdot p$. Man beachte, dass wir aufgrund des Distributivgesetzes den Faktor $\frac{V}{N}$ in jeden Term der Summe einfügen können. Wir erhalten also die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{V}{N} p_i = V \cdot p.$$

Die linke Seite entspricht der Summe der Wählenden der blauen Partei in jedem Bezirk und das rechte Glied ist die Gesamtzahl der blauen Wählenden im Staat. Die beiden müssen natürlich gleich sein, da die Summe der Bezirke den Staat ausmacht.

Aufgabe 10. *Angenommen 40 Prozent der Menschen in einem Staat wählen die blaue Partei. Kann man dann den Staat in drei Wahlbezirke aufteilen, sodass die blaue Partei in zwei von ihnen die Hälfte der Stimmen erhält und in dem dritten ein Viertel der Stimmen?*

Eine Aufteilung der p_i's, die immer möglich ist, ist die einheitliche Aufteilung. Wir ignorieren hier Rundungseffekte durch die endliche Zahl an Wählenden.

Definition 3.1

Die N Bezirke in einem Staat folgen der **Gleichverteilung**, falls $p_i = p$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Somit ist der Anteil der Wählenden für die blaue Partei in jedem Bezirk gleich groß, nämlich p.

Wir überprüfen, ob die Bedingung (3.1) für die Gleichverteilung erfüllt ist. Eine kurze Berechnung ergibt:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p = \frac{1}{N}(p + p + \cdots + p) = \frac{1}{N}(N \cdot p) = p.$$

Man beachte, dass der Anteil der roten Wählenden in jedem Bezirk ebenfalls gleich ist, also $1 - p$.

Beispiel 3.2

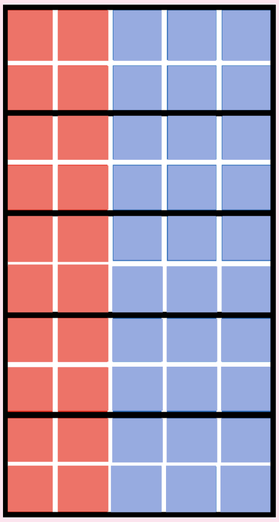


Abbildung 3.5. Gleichverteilung.

Wir nehmen erneut das vorherige Beispiel mit $p = 0.6$ und verteilen die Bezirke neu, so dass wir eine gleichmäßige Verteilung erhalten. Anschließend nummerieren wir die Bezirke von oben nach unten mit 1 bis 5. Bezirk 1 enthält 10 Personen, von denen 6 die blaue Partei wählen. Das bedeutet, dass $p_1 = \frac{6}{10} = 0.6$. Die anderen Bezirke sind identisch aufgebaut, so dass gilt: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.6 = p$.

Aufgabe 11. *Nehmen wir erneut an, dass 40 Prozent der Menschen in einem Staat für die blaue Partei stimmen. Wenn wir den Staat gemäß der Gleichverteilung in fünf Bezirke aufteilen, in wie vielen Bezirken gewinnt dann die blaue Partei?*

3.2.2 Die optimale Aufteilung

In Abbildung 3.3 haben wir bereits gesehen, dass die Aufteilung der Bezirke die Wahl stark beeinflussen kann. Nun wollen wir bei gegebenen p und N für die blaue Partei so gerrymandern, dass S - die Anzahl der Bezirke, in denen die blaue Partei gewinnt - maximal wird. Dies läuft darauf hinaus, die Bezirke so zu ziehen, dass die Werte von p_i optimal sind. Für jede Aufteilung gelten für S immer die trivialen Schranken $0 \leq S \leq N$. Der Maximalwert für S ist

$$S = \begin{cases} \lfloor 2Np \rfloor, & \text{falls } p < 0.5, \\ N, & \text{falls } p \geq 0.5. \end{cases}$$

Falls $p \geq 0.5$ wird dieser Maximalwert für S unter anderem durch die Gleichverteilung erreicht. Wenn $p < 0.5$, können wir die folgende Aufteilung verwenden:

$$p_i = \begin{cases} 0.5, & \text{falls } i \leq n, \\ Np - \frac{n}{2}, & \text{falls } i = n+1, \\ 0, & \text{falls } i \geq n+2. \end{cases}$$

mit $n = \lfloor 2Np \rfloor$. Der Beweis für diese Aufteilung, der am Ende dieses Abschnitts steht, ist für die Bearbeitung des Wettbewerbs nicht relevant, so dass diese Aufteilung hier nicht im Detail erläutert wird. Die Idee ist, den Staat so in Bezirke aufzuteilen, dass der Anteil der Wählenden, in denen blau gewinnt, genau $50\,\%$ beträgt. Auf diese Weise gibt es in diesen Bezirken keine unnötigen zusätzlichen Stimmen für die blaue Partei.

☞ **Hinweis**
Die Funktion $\lfloor . \rfloor$ wird auch Floor-Funktion genannt und bildet eine reelle Zahl x auf die größte ganze Zahl y mit $y \leq x$ ab. Sie rundet also eine Zahl ab. Zum Beispiel: $\lfloor \pi \rfloor = 3$ und $\lfloor 9/2 \rfloor = 4$.
Es gilt also $y = \lfloor x \rfloor$, falls $y \leq x < y + 1$.

Beispiel 3.3

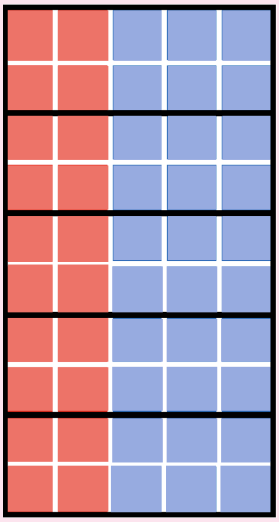


Abbildung 3.6. Gleichverteilung

Wie wir im vorherigen Beispiel gesehen haben, folgen die Bezirke hier einer Gleichverteilung. Da $p = 0.6$ gilt, folgt $p_i = 0.6$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Für S erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i) \\ &= \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.6) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.6) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.6) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.6) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.6) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Da es 5 Bezirke gibt, nimmt $S = 5$ den maximalen Wert unter Anwendung der Gleichverteilung an.

Wenn $p < 0.5$, müssen wir die Bezirke sinnvoll einteilen, um S zu maximieren. Das erreichen wir, indem wir in so vielen Bezirken wie möglich nur 50% der Stimmen erhalten. Die verbleibenden Wählenden der blauen Partei können wir in einem Bezirk zusammenfassen und diesen mit Wählenden der roten Partei füllen. In diesem Bezirk gewinnt dann die rote Partei, ebenso wie in allen übrigen Bezirken, die ausschließlich aus Personen bestehen, die für die rote Partei stimmen.

Beispiel 3.4

Angenommen, wir müssen einen Staat in 6 Bezirke aufteilen und der Anteil der blauen Wählenden beträgt 35%. Wie können wir dann optimal (für die blaue Partei) gerrymandern?
Wir bestimmen zunächst n. Da $N = 6$ und $p = 0.35$ ergibt sich, dass $2Np = 4.2$. Folglich ist $n = \lfloor 4.2 \rfloor = 4$ und wir können die Bezirke so aufteilen, dass die blaue Partei in 4 von 6 Bezirken gewinnt. Wir bestimmen nun den Wert von p_5, welcher $Np - \frac{n}{2} = 6 \cdot 0.35 - \frac{4}{2} = 2.1 - 2 = 0.1$

beträgt. Eine optimale Anordnung ist also

$$p_i = \begin{cases} 0.5, & \text{falls } i \leq 4, \\ 0.1, & \text{falls } i = 5, \\ 0, & \text{falls } i = 6. \end{cases}$$

Selbst mit nur 35% der Stimmen können wir durch die geschickte Aufteilung der Bezirke immer noch $2/3$ der Sitze erhalten. Bei gleichmäßiger Verteilung würde die blaue Partei keinen einzigen Bezirk gewinnen.
Wir können die Situation auch visuell darstellen. In der Abbildung unten gibt es 60 Wählende, von denen 21 für die blaue Partei stimmen. Das ist ein Anteil von 35%. Da $N = 6$, gibt es 10 Wählende pro Bezirk. Die Bezirke in der Abbildung sind so gezeichnet, dass wir die berechnete optimale Aufteilung realisieren.

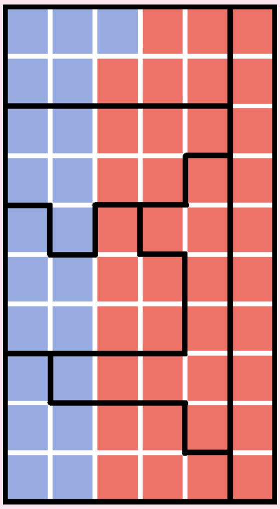


Abbildung 3.7. Optimale Aufteilung

Abschließend beweisen wir die Formel für den maximalen Wert von S für ein gegebenes N und p.

Beweis (optional).

Falls $p \geq 0.5$, so führt die Gleichverteilung zu $S = N$. Da die Anzahl der Bezirke, die hier gewonnen werden können, der Anzahl der Bezirke entspricht, ist der Wert für S maximal.

Betrachten wir nun den Fall $p < 0.5$. Hier können wir nicht mehr in jedem Bezirk gewinnen, da die Anzahl der blauen Stimmen nicht groß genug ist. Um keine Stimmen zu verschenken, müssen wir in den Bezirken, in denen wir gewinnen wollen, so knapp wie möglich gewinnen, also 50% der Stimmen erhalten (Rundungsfehler ignorierend). Schließlich wird eine zusätzliche Stimme in einem Bezirk, in dem wir bereits die Hälfte der Stimmen haben, das Ergebnis in diesem Bezirk nicht weiter verändern. Wir müssen also in so vielen Bezirken wie möglich genau 50% der Stimmen erhalten können.
Sei n die maximale Anzahl von Bezirken, in denen wir genau 50% der Stimmen erhalten. Für jeden dieser Bezirke ist $p_i = 0.5$. Wir nutzen nun die Gleichheit $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = p$, die für jede Bezirkseinteilung gilt. Betrachten wir die Summe $\sum_{i=1}^{N} p_i$. Für n Summanden ist der Wert $p_i = 0.5$, die anderen Summanden sind in der Summe zusammen kleiner als 0.5, da ansonsten n nicht maximal wäre. Daher können wir

die Summe in der Form $\sum_{i=1}^{N} p_i = n \cdot 0.5 + c$ schreiben, wobei c ein Restterm mit $0 \leq c < 0.5$ ist. Es gilt also:

$$n \cdot 0.5 \leq n \cdot 0.5 + c < n \cdot 0.5 + 0.5.$$

Als nächstes dividieren wir alle Glieder dieser Ungleichung durch N und verwenden, dass $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = p$. Wir erhalten:

$$\frac{1}{N} \cdot n \cdot 0.5 \leq p < \frac{1}{N} \cdot (n+1) \cdot 0.5.$$

Schließlich multiplizieren wir alle Glieder mit $2N$:

$$n \leq 2Np < n+1. \tag{3.2}$$

Dies bedeutet genau, dass $n = \lfloor 2Np \rfloor$. Wir können also in höchstens $\lfloor 2Np \rfloor$ Bezirken erreichen, dass die Hälfte die blaue Partei wählt. Wir werden also die Bezirke so einteilen, dass $p_i = 0.5$ für n der N Bezirke ist. Um dies so einfach wie möglich zu machen, setzten wir $p_i = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n = \lfloor 2Np \rfloor$. Wie wir die verbleibenden Wählenden auf die Bezirke aufteilen, spielt keine große Rolle, denn keine Aufteilung führt dazu, dass ein weiterer Bezirk von der blauen Partei gewonnen wird. Eine Möglichkeit besteht darin, die verbleibenden Wählenden der blauen Partei alle zusammen im Bezirk $n+1$ unterzubringen, so dass die Bezirke $n+2, n+3, \ldots, N$ ausschließlich aus roten Wählenden bestehen. Der Wert der einzelnen p_i's ist dann

$$p_i = \begin{cases} 0.5 & \text{falls } i \leq n, \\ p_{n+1} & \text{falls } i = n+1, \\ 0 & \text{falls } i \geq n+2. \end{cases}$$

Wir können den Wert von p_{n+1} explizit bestimmen. Wir wissen, dass $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = p$ und aus dieser Gleichheit könen wir den Wert von p_{n+1} bestimmen:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} 0.5 + p_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{N} 0\right) \\ &= \frac{1}{N}(n \cdot 0.5 + p_{n+1}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $p_{n+1} = Np - \frac{n}{2}$. Da nach (3.2) gilt, dass $2Np < n+1$, ergibt sich wie erwartet $p_{n+1} < \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = 0.5$. Zuletzt überprüfen wir den Wert von S. Per Definition ist $S = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i)$. Wir teilen diese Summe in drei Teile auf: Für $i \leq n$ ist $p_i = 0.5$, für $i = n+1$ ist $p_i = Np - \frac{n}{2}$ und für $i \geq n+2$ ist $p_i = 0$. Wir erhalten:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_{n+1}) + \sum_{i=n+2}^{N} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.5) + \mathbb{1}_{[0.5,1]}\left(Np - \frac{n}{2}\right) + \sum_{i=n+2}^{N} \mathbb{1}_{[0.5,1]}(0). \tag{3.3}$$

Da $0.5 \in [0.5, 1]$, gilt $\mathbb{1}_{[0.5,1]}(0.5) = 1$. Daraus folgt, dass wir für die erste Summe in der Gleichung (3.3) das n-fache des Wertes 1 bekommen. Außerdem ist $Np - \frac{n}{2} < 0.5$ und $0 < 0.5$, sodass die anderen Indikatorfunktionen 0 ergeben. Wir können somit daraus erschließen, dass $S = n$. ■

Aufgabe 12. *Wir haben angenommen, dass die blaue Partei den Bezirk gewinnt, wenn* $p_i = 1 - p_i = 0.5$. *Nehmen wir nun an, dass die rote Partei mit der gleichen Anzahl von Stimmen gewinnt und dass wir immer noch die zuvor gefundene optimale Verteilung verwenden. Wie viele Sitze gewinnt dann die blaue Partei, wenn* $p < 0.5$*?*

Aufgabe 13. *Schaut euch noch einmal die Abbildung 3.3 (d) an. Die rote Partei gewinnt die meisten Sitze, aber erreicht sie auch das theoretische Maximum? Wenn nicht, könnt ihr eine bessere Aufteilung finden? Beachtet, dass wir jetzt alles aus der Perspektive der roten Partei betrachten, sodass wir jetzt sagen, dass die rote Partei im Fall eines Unentschiedens gewinnt.*

Aufgabe 14. *Die optimale Verteilung für* $p < 0.5$*, die wir in diesem Kapitel angegeben haben, ist nicht eindeutig. Beweist, dass auch*

$$p_i = \begin{cases} 0.5, & \text{falls } i \leq n \\ \dfrac{2Np - n}{2(N-n)}, & \text{falls } i > n \end{cases}$$

eine optimale Aufteilung ergibt. Hierbei ist $n = \lfloor 2Np \rfloor$.

Aufgabe 15. *In unserem Modell haben wir geographische Beschränkungen nicht berücksichtigt. Wenn Bezirke zusammenhängende Gebiete sein müssen, sorgt dies manchmal dafür, dass die ideale theoretische Aufteilung in der Praxis nicht möglich ist. Nehmen wir nun an, dass in der folgenden Zeichnung jedes Kästchen für einen Wählenden steht. Teilt den Staat in vier Bezirke auf, sodass die blaue Partei so viele Bezirke wie möglich gewinnt. Die Bezirke müssen dabei „zusammenhängend“ sein, wobei eine Verbindung der Teilgebiete durch gemeinsame Eckpunkte nicht ausreichend ist.*

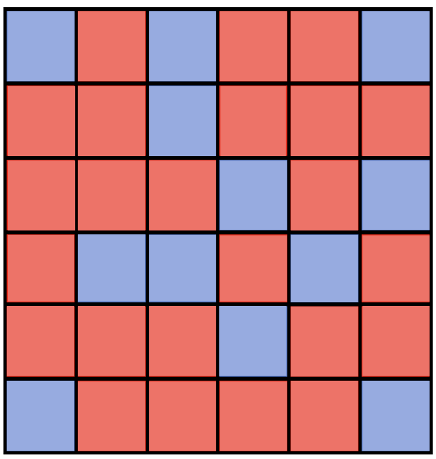


Abbildung 3.8. Geographische Beschränkungen.

3.3 Erkennung von Gerrymandering

Wie wir gesehen haben, kann Gerrymandering die Wahlergebnisse beeinflussen. Oberste Gerichte erklären daher manchmal extreme Formen des Gerrymanderings für verfassungswidrig. Dies war beispielsweise bei dem berühmten „Goofy Kicking Donald Duck“-Bezirk (Abbildung 3.2) der Fall. Es ist zwar offensichtlich, dass dieser Bezirk das Ergebnis von Gerrymandering ist, aber die Intuition allein ist vor Gericht natürlich kein ausreichendes Argument. Daher ist es nützlich, eine Reihe von Maßnahmen zur Quantifizierung zu haben, um objektiv argumentieren zu können, dass eine zu große Wahlkreisverschiebung stattgefunden hat. In diesem Abschnitt erörtern wir solche Maßnahmen.

3.3.1 Der Konvexitätskoeffizient

Die erste Maßnahme stützt sich auf die Form des Wahlkreises, um anhand dieser das Ausmaß des Gerrymanderings zu bestimmen. Sie stützt sich auf das Konzept der Konvexität.

Definition 3.2

Eine Figur ist **konvex**, wenn die Strecke zwischen zwei Punkten in der Figur immer vollständig innerhalb der Figur liegt.

Beispiel 3.5

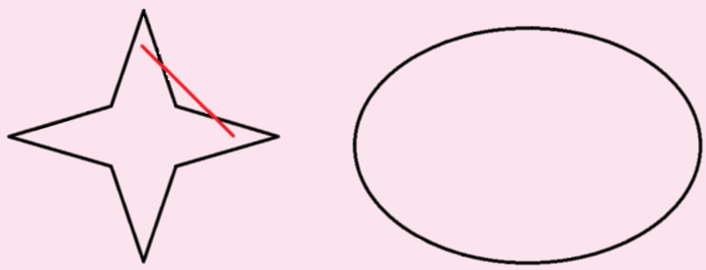


Abbildung 3.9. Ein Stern und ein Oval.

Der Stern ist nicht konvex. Zum Beispiel ist die rote Strecke nicht vollständig in der Figur enthalten. Das Oval wiederum ist konvex.

In der Menge der nicht-konvexen Figuren können wir eine weitere Unterscheidung auf Grundlage ihrer Nicht-Konvexität treffen. Um dies zu konkretisieren, definieren wir den Konvexitätskoeffizienten.

Definition 3.3

Der **Konvexitätskoeffizient** einer Figur ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten in einer Figur vollständig innerhalb dieser Figur liegt. Alle Strecken seien hierbei gleichwahrscheinlich.

Aufgabe 16. *Was ist der Konvexitätskoeffizient einer konvexen Figur?*

Der Konvexitätskoeffizient kann uns helfen, „manipulierte“ Bezirke zu erkennen. Der Versuch, Menschen mit ähnlichem Wahlverhalten oder gleicher ethnischer Zugehörigkeit in einen Bezirk zusammenzufassen, führt oft zu unregelmäßigen, unnatürlichen Formen mit vielen Einbuchtungen. Da solche Formen einen niedrigen Konvexitätskoeffizienten aufweisen, können wir diesen als Maß für Gerrymandering ansehen. Je niedriger der Wert ist, desto wahrscheinlicher ist Gerrymandering. Bei solchen Schlussfolgerungen sollte man jedoch vorsichtig sein. Manchmal kann ein niedriger Konvexitätskoeffizient auch auf die Form des Staates zurückzuführen sein, in welchem der Bezirk liegt. Wenn beispielsweise ein Bundesstaat am Meer liegt und eine sehr unregelmäßige Küstenlinie hat, weisen die an das Meer grenzenden Bezirke in der Regel auch einen niedrigen Konvexitätskoeffizienten auf.

Die Abbildungen 3.1 und 3.2 in der Einleitung zu diesem Kapitel zeigen bereits zwei Beispiele für Bezirke mit einer unnatürlichen Form aufgrund von Gerrymandering. Ein weiteres Beispiel finden wir in Illinois.

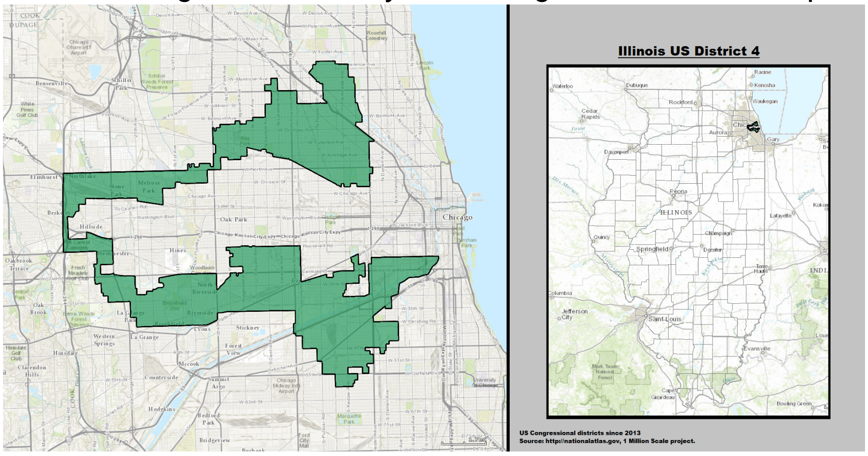


Abbildung 3.10. Bezirk 4 Illinois (2013-2023)

Dieser Bezirk verbindet zwei Gebiete, in denen viele Latinos leben, und es ist klar, dass er keinen hohen Konvexitätskoeffizienten haben kann. Die genaue Berechnung des Konvexitätskoeffizienten ist knifflig. Selbst bei einer einfachen, nicht konvexen Figur wird es schnell sehr schwierig. Daher beschränken wir uns hier auf vereinfachte Figuren. Betrachten wir den Bezirk in Illinois. Dieser besteht im Wesentlichen aus einem nördlichen und einem südlichen Teil, nur ein Highway verbindet diese Teile. Wenn wir also einen Punkt im nördlichen Teil und einen Punkt im südlichen Teil wählen, liegt die Strecke zwischen den beiden Punkten teilweise außerhalb der Fläche. Wenn wir nun annehmen, dass die Fläche der beiden Teile gleich groß ist und dass die Teile selbst konvex sind, haben wir den Bezirk im Wesentlichen zu der unten stehenden Abbildung vereinfacht.

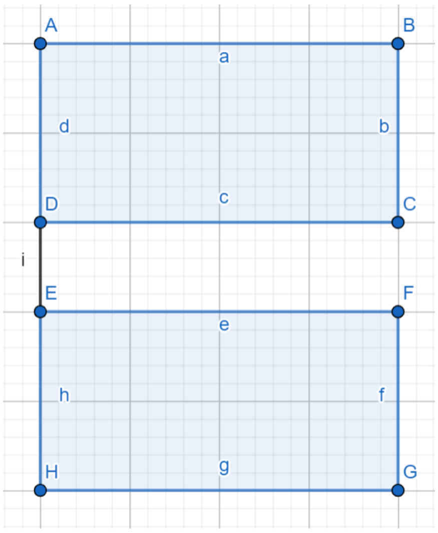


Abbildung 3.11. Vereinfachte Darstellung des Bezirks.

Die Vereinfachung führt zu zwei gleichgroßen Rechtecken: Das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten a, b, c und d sowie das Rechteck $EFGH$ mit den Seiten e, f, g und h. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Strecke zwischen zwei Punkten vollständig in der Figur enthalten ist, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass wir zweimal einen Punkt im Rechteck $ABCD$ oder zweimal einen Punkt im Rechteck $EFGH$ nehmen. Da die Rechtecke gleich groß sind, ist die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt im Rechteck $ABCD$ zu wählen genauso groß, wie die, einen Punkt im Rechteck $EFGH$ zu wählen. Diese Wahrscheinlichkeit ist also gleich 0.5. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Punkte im Rechteck $ABCD$ zu wählen, ist also $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Punkte im Rechteck $EFGH$ zu wählen, beträgt ebenfalls 0.25. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, zwei Punkte aus demselben Rechteck zu wählen, $0.25 + 0.25 = 0.5$. Unsere Schätzung für den Konvexitätskoeffizienten beträgt folglich 50%. Leider ist dies eine starke Überschätzung, denn der wahre Wert für Abbildung 3.10 (der mit Hilfe von Computeralgorithmen berechnet werden kann) liegt bei etwa 23.7%.

Beispiel 3.6

Angenommen, wir können die Form eines Bezirks auf die Figur in Abbildung 3.12 reduzieren. Der erste Kreis mit Mittelpunkt A hat den Radius 1 und der zweite Kreis mit Mittelpunkt B hat den den Radius 2. Die beiden Zentren sind im Abstand 4 voneinander entfernt. Wie groß ist der Konvexitätskoeffizient?

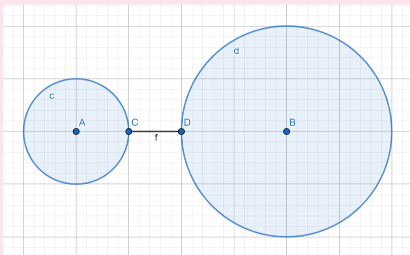


Abbildung 3.12. Vereinfachte Darstellung eines Bezirks.

Die Fläche des ersten Kreises ist π, die des zweiten Kreises ist 4π. Die Gesamtfläche ist somit 5π. Das Verhältnis $\frac{\pi}{5\pi} = \frac{1}{5} = 0.2$ bedeutet, dass 20% der Gesamtfläche auf den ersten Kreis entfallen. Wählt man einen beliebigen Punkt in der Figur, so ist die Wahrscheinlichkeit 0.2, dass der Punkt im ersten Kreis liegt und 0.8, dass er im zweiten Kreis liegt. Wählt man zwei Punkte, so liegt die Strecke zwischen ihnen nur dann in der Figur, wenn die Punkte in demselben Kreis liegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Punkte im ersten Kreis liegen, ist $0.2 \cdot 0.2 = 0.04$. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Punkte im zweiten Kreis gewählt werden, beträgt $0.8 \cdot 0.8 = 0.64$. Der Konvexitätskoeffizient ist also $0.64 + 0.04 = 0.68$.

Aufgabe 17. *Angenommen, wir können die Form eines Bezirks auf die folgende Figur in Abbildung 3.13 reduzieren. Hier hat der Kreis mit Mittelpunkt F den Radius 2 und das Quadrat hat die Seitenlänge $\sqrt{\pi}$. Der zweite Kreis hat einen Radius von 1. Wie groß ist der Konvexitätskoeffizient?*

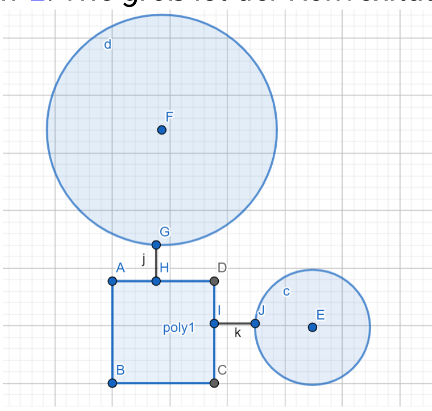


Abbildung 3.13. Vereinfachte Darstellung des exemplarischen Bezirks.

Wir können den Konvexitätskoeffizient auch auf eine vereinfachte Darstellung anwenden, bei der die Wählenden als Kästchen dargestellt werden, wie in den Abbildungen 3.3 und 3.8. Auch hier ist es schwierig den Koeffizienten genau zu bestimmen, sodass wir das Problem erneut vereinfachen werden. Wir reduzieren daher jedes Quadrat auf seinen Mittelpunkt. Auf diese Weise müssen wir nur endlich viele Strecken überprüfen. Das Abstimmmungsverhalten jedes Quadrats, das durch seine Farbe angezeigt wird, ist dabei für die Berechnung des Konvexitätskoeffizienten unerheblich.

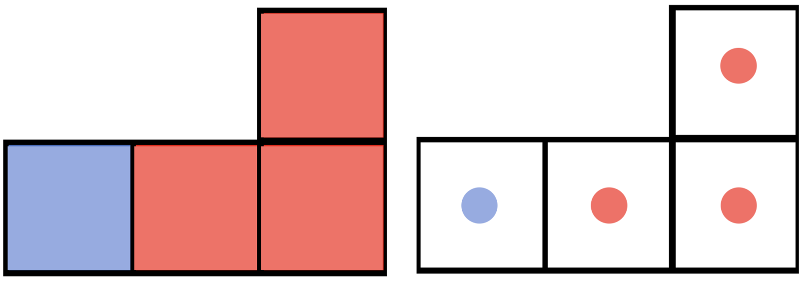


Abbildung 3.14. Ein Bezirk und seine vereinfachte Darstellung.

Die naheliegendste Methode zur Berechnung des Konvexitätskoeffizienten besteht darin, alle möglichen Strecken zu zählen und zu prüfen, wie viele davon vollständig innerhalb der Figur liegen. Dividiert man diese Zahl durch die Gesamtzahl der Strecken, erhält man den Konvexitätskoeffizienten. Diese Art der Berechnung des Konvexitätskoeffizienten erfordert eine Menge Zählarbeit, die wir uns mit zwei Tricks etwas erleichtern können.

Zunächst können wir die Gesamtzahl aller möglichen Strecken mit einer Formel berechnen, anstatt diese einzeln zu zählen. Denn die Anzahl der möglichen Strecken hängt nur von der Anzahl der Punkte ab, aus denen die Figur besteht. Die Form der Figur ist dabei zunächst irrelevant. Wenn es n Punkte gibt, entspricht jede Strecke einer Auswahl von zwei dieser n Punkte - dem Anfangs- und dem Endpunkt. Für den Anfangspunkt haben wir n Möglichkeiten. Für die Wahl des Endpunktes bleiben entsprechend nur $n-1$ Möglichkeiten, weil sich Anfangs- und Endpunkt unterscheiden müssen. Daraus ergeben sich $n\cdot(n-1)$ mögliche Auswahlen von Punktepaaren, die wir noch durch 2 teilen müssen, weil eine Strecke identisch bleibt, wenn man Anfangs- und Endpunkt vertauscht. Die Gesamtstreckenzahl ist somit $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$, wobei n der Anzahl der Punkte in der Abbildung entspricht.

Beispiel 3.7

Schauen wir uns nochmal die vereinfachte Form des in Abbildung 3.14 dargestellten Bezirks an. Er besteht aus 4 Punkten. Die Gesamtzahl der möglichen Strecken ist somit $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot(4-1)}{2} = 6$. In diesem Fall können wir fast alle Punkte geradlinig verbinden, sodass die Verbindungsstrecke vollständig innerhalb der Figur bleibt. Es gibt nur eine Ausnahme: Der blaue Punkt kann nicht geradlinig mit dem oberen roten Punkt verbunden werden, ohne die Figur zu verlassen. Der Konvexitätskoeffizient ist also $5/6$.

Aufgabe 18. *Berechnet den vereinfachten Konvexitätskoeffizienten für die Bezirke im letzten Bild von Abbildung 3.3.*

Wir können festhalten, dass die exakte Bestimmung des richtigen Konvexitätskoeffizienten schwierig ist und beschränken uns daher auf vereinfachte Annäherungen. Außerdem muss die Form des Staates bei der Einschätzung berücksichtigt werden. Zum Beispiel haben viele Staaten selbst einen niedrigen Konvexitätskoeffizieten, insbesondere an der Küste, was auch zu niedrigen Koeffizienten der Bezirke in diesen Gebieten führt. Daher ist es am besten, auch den Konvexitätskoeffizienten eines Bezirks mit dem des Staates zu vergleichen, in welchem der Bezirk liegt, um ein differenziertes Bild der Situation zu erhalten.

3.3.2 Die Symmetriemethode

Der Konvexitätskoeffizient deckt Gerrymandering auf, indem er die Form der einzelnen Bezirke untersucht. Die Symmetriemethode berücksichtigt alle Bezirke eines Staates gleichzeitig und untersucht, wie die Stimmen nach Bezirken verteilt sind.

Wir nennen dazu die Anzahl der Stimmen für die rote Partei V^R und die Anzahl der Stimmen für die blaue Partei V^B. Wenn es also A Einwohner im Staat gibt, ist V^B gleich pA, wobei p wie in Abschnitt 3.2 definiert ist. In einem Wahlkreis i geben wir die Anzahl der Stimmen für die rote Partei als V_i^R und die Anzahl der Stimmen für die blaue Partei als V_i^B an. Zudem nennen wir S die Anzahl der von der blauen Partei gewonnen Sitze und setzen $Q = \frac{S}{N}$. Somit entspricht Q dem Prozentsatz der Sitze, die die blaue Partei gewinnt.

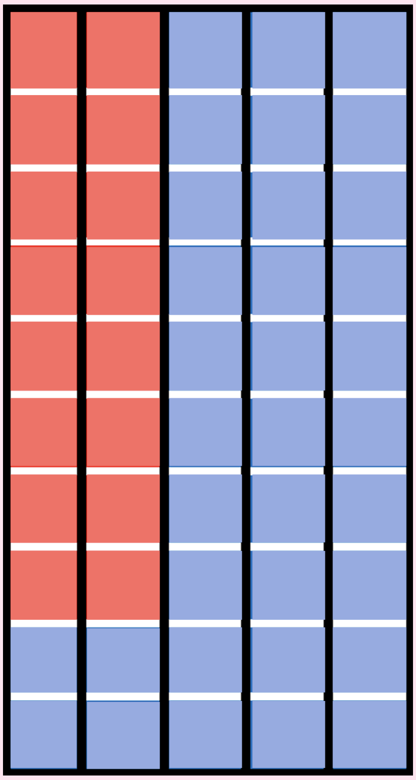
Wir können die Wahlergebnisse im Bezirk i mit einem Zahlenpaar (V_i^B, V_i^R) zusammenfassen. Wir nehmen nun an, dass es einen gleichmäßigen Meinungsumschwung gibt, so dass in jedem Bezirk eine gewisse Anzahl von Personen $t \in \mathbb{Z}$ ihre Stimmen von der roten zur blauen Partei ändern. Dann ändert sich das Ergebnis im Bezirk zu $(V_i^B + t, V_i^R - t)$. Wenn t negativ ist, wechseln in jedem Bezirk $-t$ Menschen ihre Stimme von der blauen Partei zur roten Partei. Für große Werte von t kann die Anzahl der Stimmen für eine Partei in einem Bezirk negativ werden. In der Realität ist dies natürlich nicht möglich, also interpretieren wir, dass eine negative Anzahl von Stimmen genau 0 Stimmen entspricht. Analog dazu vereinbaren wir: Wenn die Anzahl der Stimmen für eine Partei die Anzahl der Menschen im Bezirk übersteigt, dann hat jede Person im Bezirk für diese Partei gestimmt.

Indem wir die Stimmen ändern, erhalten wir auch neue Werte für V^B und V^R, die wir V_t^B und V_t^R nennen. Analog kennzeichnen wir die neuen Werte von S und Q nach der Meinungsverschiebung von t mit S_t und Q_t.

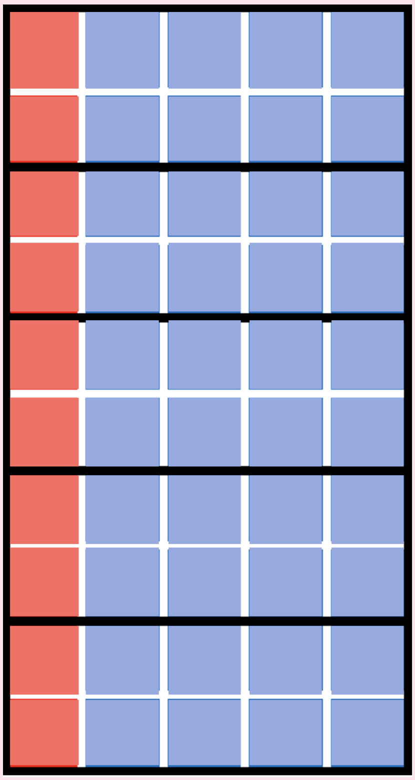
Beispiel 3.8

Wir schauen uns die drei Bezirkseinteilungen in Abbildung 3.3 an. Bis jetzt haben wir ein Kästchen als einen Wählenden interpretiert, von nun an steht ein Kästchen für 1000 (gleich) Wählende. Dies bedeutet, dass der Staat aus $50\,000$ Wählenden besteht. Später in diesem Abschnitt wird deutlich, warum wir diese Änderung vorgenommen haben.
Die Wählenden werden in 5 Bezirke aufgeteilt, also gilt $N = 5$. Die Anzahl der Wählenden der blauen Partei ist $V^B = 30\,000$, die der roten Partei entsprechend $V^R = 20\,000$. In Abbildung (b) ist $S = 3$ und $Q = \frac{3}{5} = 0.6$. Bei der Einteilung (c) ist $S = 5$ und somit $Q = 1$. In der rechten Abbildung ist $S = 2$ und $Q = 0.4$.
Angenommen, es gibt eine gleichmäßige Meinungsverschiebung mit $t = 2000$. Dies bedeutet,

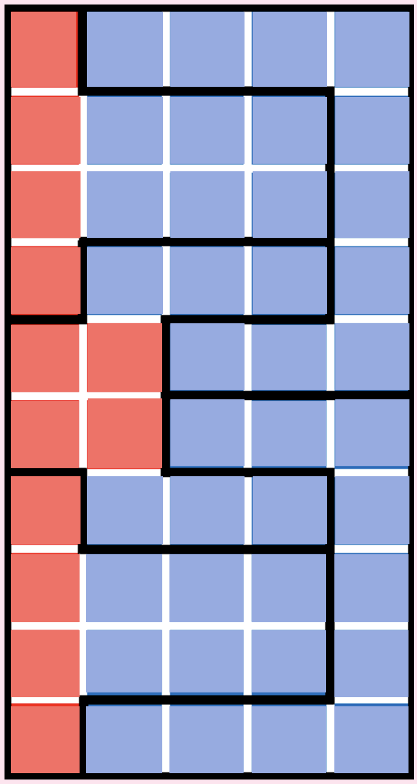
dass in jedem Bezirk 2000 Wählende der roten Partei ihre Wahlentscheidung zugunsten der blauen Partei ändern. In jedem Bezirk werden also zwei rote Kästchen zu blauen.



(a). Zwei rote und drei blaue Bezirke.



(b). Keine rote und fünf blaue Bezirke.



(c). Keine rote und fünf blaue Bezirke.

Abbildung 3.15. Situation nach dem Meinungsumschwung der 2000 Wählenden.

Wir untersuchen nun die erste Bezirksaufteilung. Für die beiden linken Bezirke ändert sich das Ergebnis von $(0, 10\,000)$ auf $(2000, 8000)$. Trotz des veränderten Wahlverhaltens siegt die rote Partei weiterhin in diesen Bezirken. Für die drei rechten Bezirke lag das Wahlergebnis zuvor bei $(10\,000, 0)$. Aus dem Meinungsumschwung ergibt sich zunächst das Paar $(12\,000, -2000)$. Da es jedoch nicht mehr als $10\,000$ Stimmen zu gewinnen gibt und es keine negative Stimmzahl geben kann, interpretieren wir dieses als $(10\,000, 0)$. Dies ist das gleiche Ergebnis wie vor der Verschiebung. Die blaue Partei gewinnt also wieder in diesen Bezirken und wir erkennen, dass weiterhin $S_{2000} = S = 3$ und $Q_{2000} = Q = 0.6$ gilt. Das veränderte Wahlverhalten hat also keinen Einfluss auf das Ergebnis.
Analog dazu sehen wir, dass in der zweiten Bezirkseinteilung immer noch $S_{2000} = 5$ und $Q_{2000} = 1$ gilt. Der Wert der dritten Einteilung hat sich dagegen geändert und beträgt nun auch $S_{2000} = 5$ und $Q_{2000} = 1$.
Wir schließen daraus, dass ein verändertes Wahlverhalten auf verschiedene Bezirkseinteilungen unterschiedliche Auswirkungen haben kann.

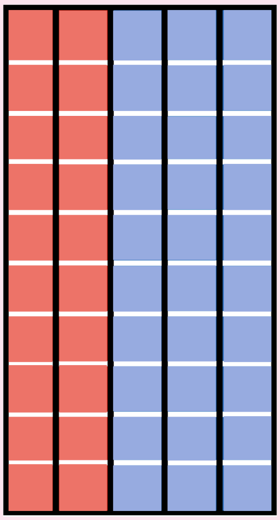
Aufgabe 19. *Bestimme den Wert von S_{-2000} und Q_{-2000} für die drei Bezirkseinteilungen im vorherigen Beispiel.*

Um eine bessere Vorstellung von den Auswirkungen einer gleichmäßigen Verschiebung der Wählenden zu bekommen, zeichnen wir ein Diagramm mit den Punkten $\{(p_t, Q_t) | t \in \mathbb{Z}\}$. Der Wert p_t ist der Anteil der Wählenden für die blaue Partei im Staat nach der einheitlichen Veränderung des Wahlverhaltens.

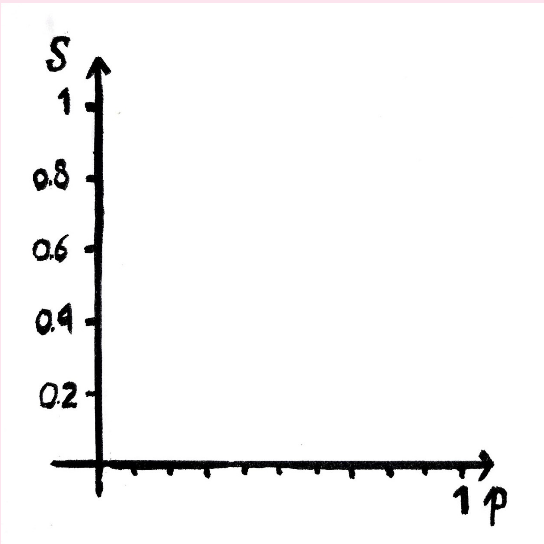
Wir verwenden die horizontale Achse, um die Werte von p_t auszudrücken und die vertikale Achse für die Werte von Q_t. Beide Variablen liegen im Intervall zwischen 0 und 1. Die Kurve, die durch die Punkte gebildet wird, nennen wir eine simulierte Sitzkurve.

Beispiel 3.9

Betrachten wir die Bezirkseinteilung in der folgenden Abbildung. Wir sehen, dass $p = 0.6$ und $Q = 0.6$.

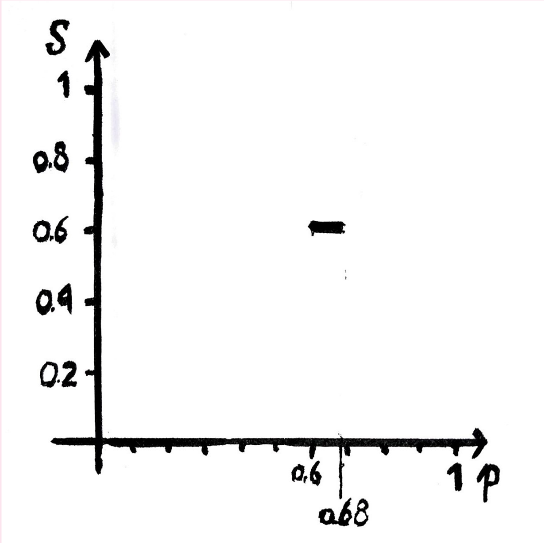


Wir zeichnen die simulierte Sitzkurve Schritt für Schritt. Zunächst zeichnen wir unser Koordinantensystem ein. Auf die x-Achse tragen wir die Werte von p_t, auf die y-Achse die Werte Q_t. Beide Werte liegen zwischen 0 und 1. Zudem kann Q_t nur die Werte 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 und 1 annehmen, weil es fünf Sitze zu gewinnen gibt und man einen Sitz nicht teilweise gewinnen kann. Des Weiteren kann auch p_t auf Werte der Form $\frac{V^B}{50\,000}$ mit $V^B \in \{0, 1, \ldots, 50\,000\}$ eingeschränkt werden. Wir können allerdings nicht so genau zeichnen und nehmen daher an, dass p_t jeden Wert von 0 bis 1 annehmen kann. Um diese Annahme treffen zu können, ist es wichtig, dass es genügend Wählende gibt, sodass ein Kästchen 1000 Wählende statt einen einzelnen Wählenden repräsentiert.

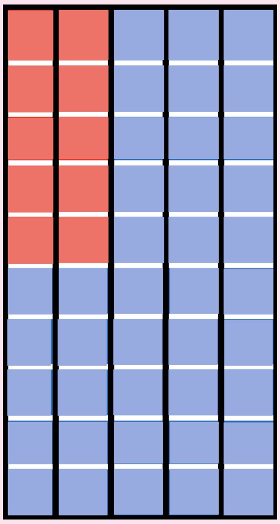


Der Punkt (p_0, Q_0), also ohne eine Verschiebung der Wählenden, liegt immer in der Menge $\{(p_t, Q_t) | t \in \mathbb{Z}\}$ und kann einfach aus der Abbildung abgelesen werden. Dieser liegt bei $(0.6, 0.6)$. Wir haben zudem schon im vorherigen Beispiel berechnet, dass $Q_{2000} = 0.6$. Außerdem ergibt der Zuwachs um 2000 Wählende auf insgesamt $34\,000$ Stimmen für die blaue

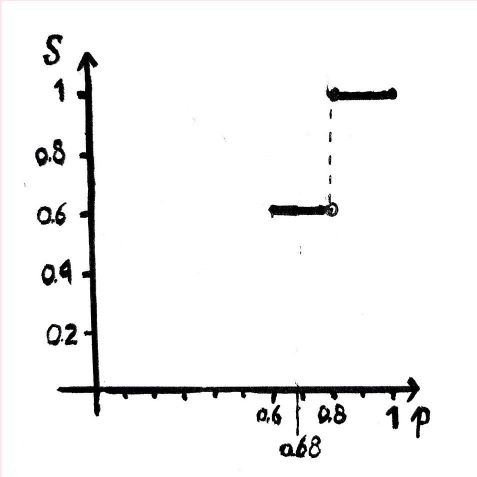
Partei einen Wert von $p_{2000} = \frac{34\,000}{50\,000} = 0.68$. Der Punkt $(0.68, 0.6)$ liegt also auch auf dem Graphen. Für jeden Wert zwischen 0.6 und 0.68 nimmt die Funktion ebenfalls den Wert 0.6 an. Wir zeichnen den bisherigen Graphen ein.



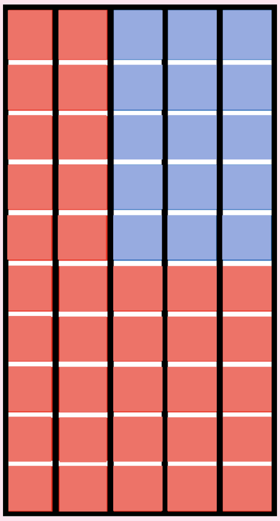
Um die gesamte Kurve zu bestimmen, ist es nun nicht sinnvoll alle Punkte auf diese Weise zu bestimmen. Wir müssen stattdessen nach Sprungstellen suchen, also nach Werten von p_t, für die Q_t springt. Die Frage ist also, für welchen Wert von p_t die blaue Partei mindestens einen zusätzlichen Bezirk gewinnt. Wenn wir in diesem Beispiel wieder davon ausgehen, dass die blaue Partei im Falle eines Gleichstands gewinnt, geschieht dies, wenn jeweils fünf Quadrate in den beiden Bezirken ganz links blau werden. Dies geschieht bei $t = 5000$.



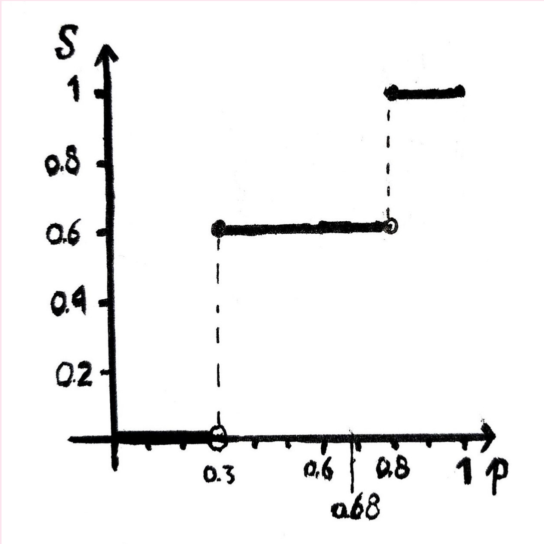
Es gilt dann, dass $Q_{5000} = 1$. Es gibt nun 40 blaue Quadrate und somit ist $p_{5000} = 0.8$. Bei einer noch größeren Verschiebung zugunsten der blauen Partei wird Q natürlich ebenfalls 1 sein, sodass wir unseren Graphen weiter zeichnen können:



Nun schauen wir, was passiert, wenn $p < 0.6$. Auch hier suchen wir nach einem Schwellwert als den Moment, in dem blau einen der drei Bezirke rechts verliert. Da die drei Bezirke die gleiche Zusammensetzung an Wählenden haben, werden die Bezirke alle beim gleichen Wert von t die*den Bezirkssieger*in wechseln. Die blaue Partei kann in jedem dieser Bezirke genau 5000 Stimmen verlieren, ohne die Bezirke zu verlieren. Wenn 5001 Menschen ihre Meinung ändern, verliert diese alle drei Bezirke, sodass keiner übrig bleibt, indem die blaue Partei gewinnt. Mathematisch bedeutet dies: $Q_{-5000} = 3$ und $Q_{-5001} = 0$. Wir können auch die Situation für $t = 5000$ wieder in einem Bild darstellen:



Wir können dann auch den Wert von p ablesen. Dazu zählen wir die blauen Quadrate. Dies sind 15, sodass $p = \frac{15\,000}{50\,000} = 0.3$. Damit gilt für $p < 0.3$, dass der zugehörige Wert $Q = 0$ ist und für alle $0.3 \leq p < 0.8$ gilt: $Q = 0.6$.



Beispiel 3.10

Mit dem gleichen Verfahren kann auch die simulierte Sitzkurve der folgenden Bezirksaufteilung ermittelt werden.

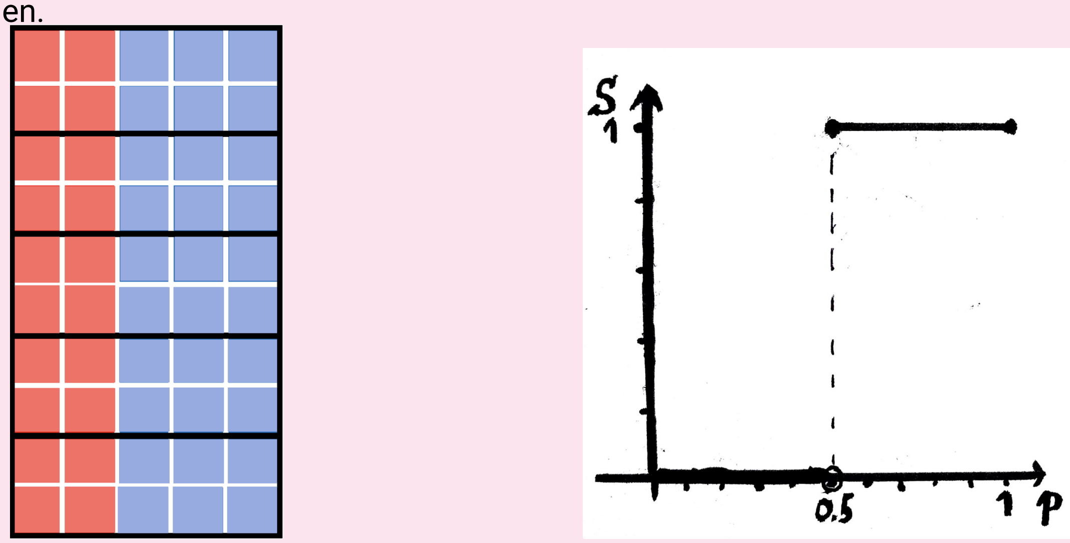


Abbildung 3.16. Bezirkseinteilung mit dazugehöriger simulierter Sitzkurve.

Aufgabe 20. *Ermittelt die simulierte Sitzkurve für die ganz rechts abgebildete Bezirkseinteilung in Abbildung 3.3.*

Die Symmetrie der simulierten Sitzkurve wird als Kriterium für eine gerechte Bezirkseinteilung herangezogen. Dazu wird überprüft, ob die Kurve symmetrisch zum Punkt $(0.5, 0.5)$ ist. Dies ist zum Beispiel im vorherigen Beispiel 3.10 der Fall. Hier kann die blaue Partei alle Sitze mit nur 60% der Stimmen gewinnen. Wenn aber die rote Partei 60% der Stimmen gewonnen hätte, hätte sie alle Sitze erhalten. In diesem Sinne behandelt diese Bezirksaufteilung die Parteien gleich und ist daher gerecht.

Das zuvor herangezogene Beispiel ist dagegen nicht symmetrisch zum Punkt $(0.5, 0.5)$. Die Anordnung scheint für die blaue Partei vorteilhaft zu sein. Eine Möglichkeit, diesen Vorteil zu quantifizieren besteht darin, die Höhe der Kurve über dem Punkt $(0.5, 0.5)$ zu messen. Für das zweite Beispiel beträgt diese Höhe 0, für das erste Beispiel dagegen 0.1, was auf ein Gerrymandering zugunsten der blauen Partei hindeutet. Ist die Höhe im Bezug auf den Punkt $(0.5, 0.5)$ negativ, begünstigt die Bezirkseinteilung im Gegenzug die rote Partei.

Aufgabe 21. *Ist die Aufteilung, die in Aufgabe 20 diskutiert wird, in Bezug auf die Symmetriemethode gerecht? Wenn nicht: Wie weit liegt die simulierte Sitzkurve über oder unter dem Punkt* $(0.5, 0.5)$*?*

3.3.3 Die Effizienzlücke

In Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, wie man optimal gerrymandert. Die Strategie besteht darin, in so vielen Bezirken wie möglich knapp zu gewinnen und in den Fällen, wo dies nicht möglich ist, die andere Partei mit einer möglichst großen Mehrheit gewinnen zu lassen. Alle Stimmen, die von einer Partei zusätzlich zu den 50% in einem Gewinnbezirk erhalten werden, und alle Stimmen, die eine Partei in einem Verlierbezirk erhält, sind für das Wahlergebnis irrelevant. Die Effizienzlücke analysiert diese Stimmen, um festzustellen, ob Gerrymandering vorliegt. Um die Effizienzlücke zu berechnen, müssen wir zunächst die Zahl der überzähligen Stimmen sowie die Zahl der verlorenen Stimmen zählen. Eine überzählige Stimme ist eine Stimme in einem Wahlbezirk, in dem die Partei zwar gewinnt, diese Stimme aber nicht mehr benötigt wurde, um diesen zu gewinnen. Eine verlorene Stimme ist jede Stimme in einem Bezirk, in dem die Partei verliert. In der nachfolgenden Abbildung sind alle verlorenen Stimmen sowohl für die blaue als auch die rote Partei mit einem V und alle überzähligen Stimmen mit einem O gekennzeichnet worden. Wie im vorherigen Abschnitt steht jedes Kästchen für 1000 Wählende.

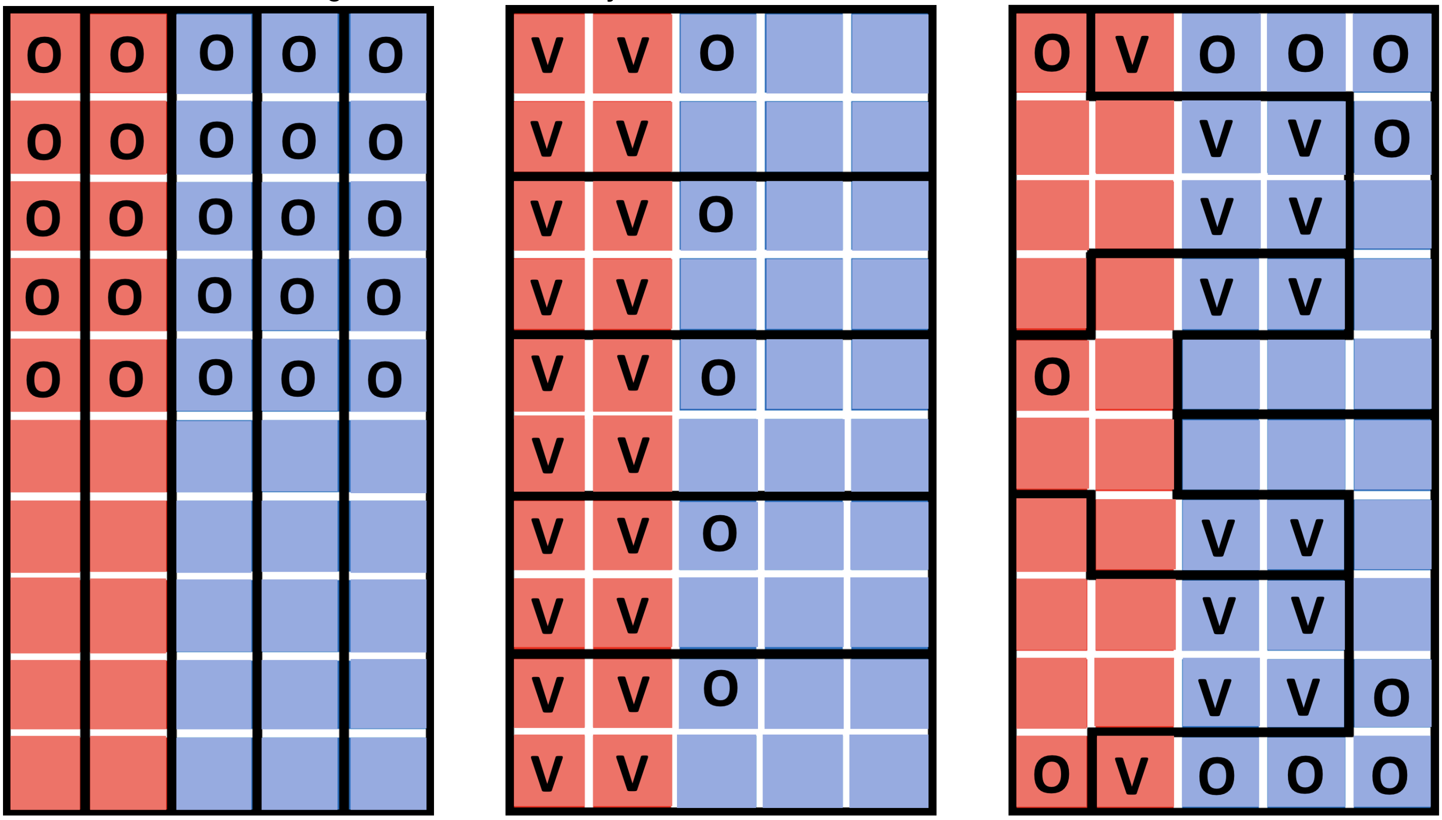


Abbildung 3.17. Verlorene und überflüssige Stimmen.

Wir bezeichnen die Anzahl der verlorenen oder überzähligen Stimmen der Partei P im Bezirk i mit W_i^P. Es gilt, dass

$$W_i^P = \begin{cases} V_i^P & \textit{falls die Partei P den Bezirk verliert (dies sind verlorene Stimmen),} \\ V_i^P - \dfrac{A}{2N} & \textit{falls die Partei P den Bezirk gewinnt (dies sind überzählige Stimmen).} \end{cases}$$

Hierbei ist A die Gesamtzahl der Wählenden im Staat, N die Zahl der Bezirke und V_i^P die Anzahl der Stimmen für die Partei P im Bezirk i. Die Gesamtzahl der verlorenen und überzähligen Stimmen der blauen Partei ist $W^B = \sum_{i=1}^{N} W_i^B$ und die Gesamtzahl der verlorenen und überzähligen Stimmen der roten Partei ist $W^R = \sum_{i=1}^{N} W_i^R$.

Beispiel 3.11

Wir sehen uns nochmal die mittlere Bezirksaufteilung in Abbildung 3.17 an. In jedem Bezirk gewinnt die blaue Partei, sodass es nur überzählige Stimmen gibt. Wir stellen fest, dass $W_i^B = 6000 - 5000 = 1000$. Außerdem verliert die rote Partei in jedem Bezirk, sodass es aus dieser Perspektive nur verlorene Stimmen für Rot gibt. Wir folgern, dass $W_i^R = 4000$. Da es fünf identische Bezirke gibt, ergibt sich $W^B = 5 \cdot 1000 = 5000$ sowie $W^R = 5 \cdot 4000 = 20\,000$

Wir verwenden die Gesamtzahl der verlorenen und überzähligen Stimmen beider Parteien, um ein neues Maß für Gerrymandering zu definieren.

Definition 3.4

Die **Effizienzlücke** zwischen der blauen (B) und der roten (R) Partei ist

$$E = \frac{W^B - W^R}{A}$$

wobei A hier die Gesamtzahl der Wählenden im Staat meint.

Die Effizienzlücke liegt zwischen -1 und 1. Ist die Effizienzlücke stark positiv, ist dies ein Hinweis darauf, dass die Wahl zugunsten der roten Partei manipuliert wurde. Ist die Effizienzlücke dagegen stark negativ, deutet dies auf eine Wahlmanipulation im Sinne der blauen Partei hin. Was genau stark positiv und stark negativ meint, ist dabei nicht eindeutig zu bestimmen. Als gängige Grenzwerte haben sich -0.08 und 0.08 herausgestellt.

Beispiel 3.12

Sowohl das erste als auch das zweite Beispiel in Abbildung 3.17 zeigen Anzeichen von Gerrymandering. Die erste Bezirkseinteilung würde die rote Partei begünstigen, die zweite dagegen die blaue Partei. Wir wollen hier die genaue Effizienzlücke berechnen. Für die erste Bezirkseinteilung zählen wir für die blaue Partei $15\,000$ überflüssige Stimmen und keine verlorenen Stimmen. Für die rote Partei wiederum zählen wir ebenfalls 0 verlorene Stimmen, aber $10\,000$ überzählige Stimmen. Die Effizienzlücke ist daher $E = \frac{15\,000 - 10\,000}{50\,000} = 0.1$. Im zweiten Beispiel erhalten wir $W^B = 5 \cdot 1000 = 5000$ und $W^R = 5 \cdot 4000 = 20\,000$. Die Effizienzlücke liegt bei $E = \frac{5000 - 20\,000}{50\,000} = -0.3$.

Aufgabe 22. *Berechnet die Effizienzlücke für das dritte Beispiel in der Abbildung 3.17.*

☞ **Hinweis**

Schaut man sich noch einmal die Analyse nach der Symmetriemethode an, so ergibt sich ein ganz anderes Bild. Die zweite Bezirkseinteilung war nach dieser fair. Die zweite Methode zeigte zwar Anzeichen von Gerrymandering, jedoch im Gegensatz zu den Ergebnissen in diesem Abschnitt zugunsten der blauen Partei.

Die Effizienzlücke ist ein sehr intuitives und leicht zu berechnendes Maß für Gerrymandering. Bei einer engen Wahl, bei welcher die beiden Parteien in den einzelnen Bezirken nur wenige Stimmen trennen, besteht die Gefahr, dass wir fälschlicherweise von Gerrymandering ausgehen. Wenn es vor der Wahl in jedem Bezirk völlig unklar ist, wer gewinnen wird, und am Ende die blaue Partei jeden Bezirk knapp gewinnt, wäre die Effizienzlücke stark negativ. Die Symmetriemethode hat diesen Nachteil nicht, ist aber auch weniger intuitiv und viel schwieriger zu berechnen.

Kapitel 4 Lösungen

Lösung 1

Unabhängig von der Zahl der Wahlmöglichkeiten muss ein*e Kandidat*in mindestens eine Stimme mehr als die Hälfte aller Stimmen erhalten, um sicher zu gewinnen, d.h. mehr als $50\,\%$.

Lösung 2

- Die Teilbarkeit ist transitiv, aber nicht vollständig. Angenommen a ist ein Teiler von b, dann gibt es ein n, sodass $b = a \cdot n$. Ist b auch ein Teiler von c, dann gibt es ein m mit $c = b \cdot m$. Durch Einsetzen erhalten wir $c = (a \cdot n) \cdot m = a \cdot (n \cdot m)$ wobei $n \cdot m$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Wir sehen also, dass Teilbarkeit transitiv ist. Sie ist allerdings nicht vollständig. So ist beispielsweise 3 kein Teiler von 4, aber 4 auch kein Teiler von 3. Man kann 3 und 4 also nicht ordnen.
- Die Beziehung ist transitiv und vollständig. Bei zwei reellen Zahlen kann immer bestimmt werden, ob eine Zahl kleiner-gleich oder größer-gleich ist. Zudem gilt auch, wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, dass $a \leq c$.
- Das Spiel Schere-Stein-Papier ist nicht transitiv. Denn Papier schlägt Stein und Stein schlägt Schere, aber Papier schlägt nicht Schere. Es ist vollständig, da immer feststeht, welche von zwei Optionen gewinnt.

Lösung 3

- Es gibt drei Kandidierende. Somit erhält der erste Platz drei Punkte, der zweite zwei Punkte und der letzte Platz einen Punkt. Ein Kandidierender kann die maximale Punktzahl erreichen, wenn er von jedem Wählenden an die erste Stelle gesetzt wird und somit von jedem Wählenden drei Punkte erhält. Es sind also $50 \cdot 3 = 150$ Punkte maximal erreichbar.
- Umgekehrt kann ein Minimum erreicht werden, wenn ein Kandidierender von jedem Wählenden auf den letzten Platz gesetzt wird. Dann erhält eine Mindestpunktzahl von $50 \cdot 1 = 50$ Punkten.
- Jeder Wählende verteilt sechs Punkte: Drei für den ersten, zwei für den zweiten und einen für den dritten Platz. Insgesamt gibt es also $50 \cdot 6 = 300$ zu vergeben.

Lösung 4

Wenn es vier Kandidierende gibt, dann gibt es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Kombinationen. Für eine Gesamtzahl von n Kandidierenden haben wir $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten.

Lösung 5

Wir listen die Lösungen jeweils für jedes Beispiel auf:

- Beispiel 2.2:
  Paarweises Mehrheitsverfahren: Mathematik $=$ Deutsch $=$ Geschichte $\succ$ Wirtschaft
  Borda-Verfahren: Geschichte $=$ Deutsch $\succ$ Mathematik $\succ$ Wirtschaft
- Beispiel 2.3:

Paarweises Mehrheitsverfahren: Sowohl C als auch D erhalten zwei Punkte, aber im Paarvergleich gewinnt C gegen D. Damit siegt bei dieser Methode C. Borda-Verfahren: $C \succ A \succ D \succ B$

- Beispiel 2.7:
  Mehrheitswahl: $A \succ B \succ C$
  Borda-Verfahren: $C \succ A \succ B$
- Beispiel 2.8:
  Mehrheitswahl: $A \succ C \succ B$
  Borda-Verfahren: $B \succ C \succ A$
- Beispiel 2.10:
  Mehrheitswahl: $A \succ C \succ B$
  Paarweises Mehrheitsverfahren: $A \succ C \succ B$

Lösung 6

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, so dass ein*e Kandidat*in mit n ersten und $10-n$ letzten Plätzen (Worst Case) immer noch gegen eine*n andere*n Kandidat*in mit (Best Case) $10-n$ ersten Plätzen und n zweiten Plätzen gewinnt. Gesucht ist also das kleinste n mit

$$n \cdot 4 + (10-n) \cdot 1 > (10-n) \cdot 4 + n \cdot 3.$$

Man berechnet $n > 7.5$, also $n = 8$.

Lösung 7

Man könnte beispielsweise das folgende Szenario betrachten (es sind aber mehrere Szenarien möglich):

Anzahl Stimmen	12	9	4
Erste Wahl	A	B	B
Zweite Wahl	C	C	A
Dritte Wahl	B	A	C

Kandidat*in B gewinnt mit 13 Stimmen bei einem Mehrheitsverfahren, also mit absoluter Mehrheit. Beim paarweisen Mehrheitsverfahren erreicht B zwei Punkte, A einen und C keinen Punkt. B gewinnt somit auch in diesem Verfahren (wie logischerweise immer bei absoluter Mehrheit). Beim Borda-Verfahren erreicht A 53 Punkte, B 51 Punkte und C 46 Punkte. A gewinnt also nach dem Borda-Verfahren. Somit hat ein*e Kandidat*in mit absoluter Mehrheit nicht die Garantie, die Wahl auch nach dem Borda-Verfahren zu gewinnen.

Lösung 8

Die Anzahl der Punkte für jede Position wird um 1 reduziert. Der erste Kandidierende erhält dann $n-1$ Punkte. Der Kandidierende auf dem m-ten Platz erhält in diesem Fall $n-m$ Punkte (Spezialfall: auf dem n-ten Platz dann $n-n=0$ Punkte).

Lösung 9

Das ist eine persönliche Frage. Es gibt also keine richtige oder falsche Antwort.

Lösung 10

Wir haben $p = 0.4$ und $N = 3$. Die gewünschten Werte der p_i's sind $p_1 = p_2 = 0.5$ und $p_3 = 0.25$. Es müsste also gelten: $0.4 \overset{!}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{1}{3}(0.5 + 0.5 + 0.25) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{12} > 0.4$. Eine solche Aufteilung ist also nicht möglich.

Lösung 11

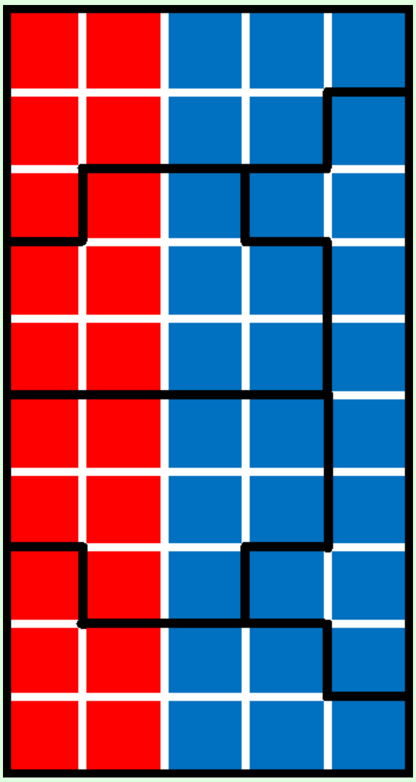
Die blaue Partei wird in jedem Bezirk 40% der Stimmen erhalten und daher in jedem Wahlbezirk verlieren.

Lösung 12

Für jeden Bezirk gilt, dass $p_i \leq 0.5$. Um diese zu gewinnen, müsste jeweils $p_i > 0.5$ gelten. Die blaue Partei gewinnt somit keinen Wahlbezirk, so dass $S = 0$ gilt.

Lösung 13

Wir betrachten die Situation aus Sicht der roten Partei und setzen daher $p = 0.4$. Wir müssen den Staat in 5 Bezirke aufteilen, somit ist $N = 5$. Der maximale Wert für S ist dann $S = \lfloor 2Np \rfloor = \lfloor 2 \cdot 5 \cdot 0.4 \rfloor = 4$. In diesem Beispiel erhält die rote Partei nur 3 der Sitze, sodass das Gerrymandering hier nicht optimal ist. Eine optimale Zuteilung wird durch folgende Aufteilung erreicht: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.5$ und $p_5 = 0$.

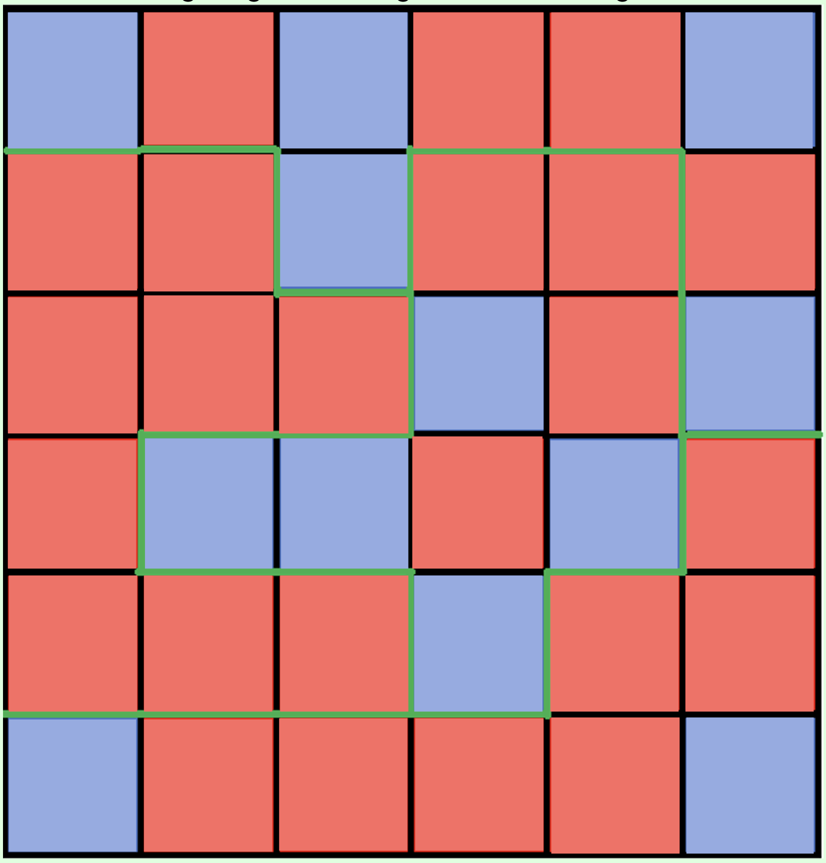


Lösung 14

Wir prüfen zunächst, ob die Aufteilung möglich ist: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{1}{N}\left(n \cdot 0.5 + (N-n) \cdot \frac{2Np-n}{2(N-n)}\right) = \frac{1}{N}\left(n \cdot 0.5 + Np - \frac{n}{2}\right) = p$. Da $p_i = 0.5$ für jedes $1 \leq i \leq n$, gilt mit Sicherheit, dass $S = n$ und damit die Verteilung optimal ist.

Lösung 15

Wir können dies Staat auch unter Berücksichtigung der geographischen Beschränkungen optimal aufteilen. Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Aufteilung:



Lösung 16

Der Konvexitätskoeffizient einer konvexen Figur ist 1, da alle Strecken im Inneren verlaufen.

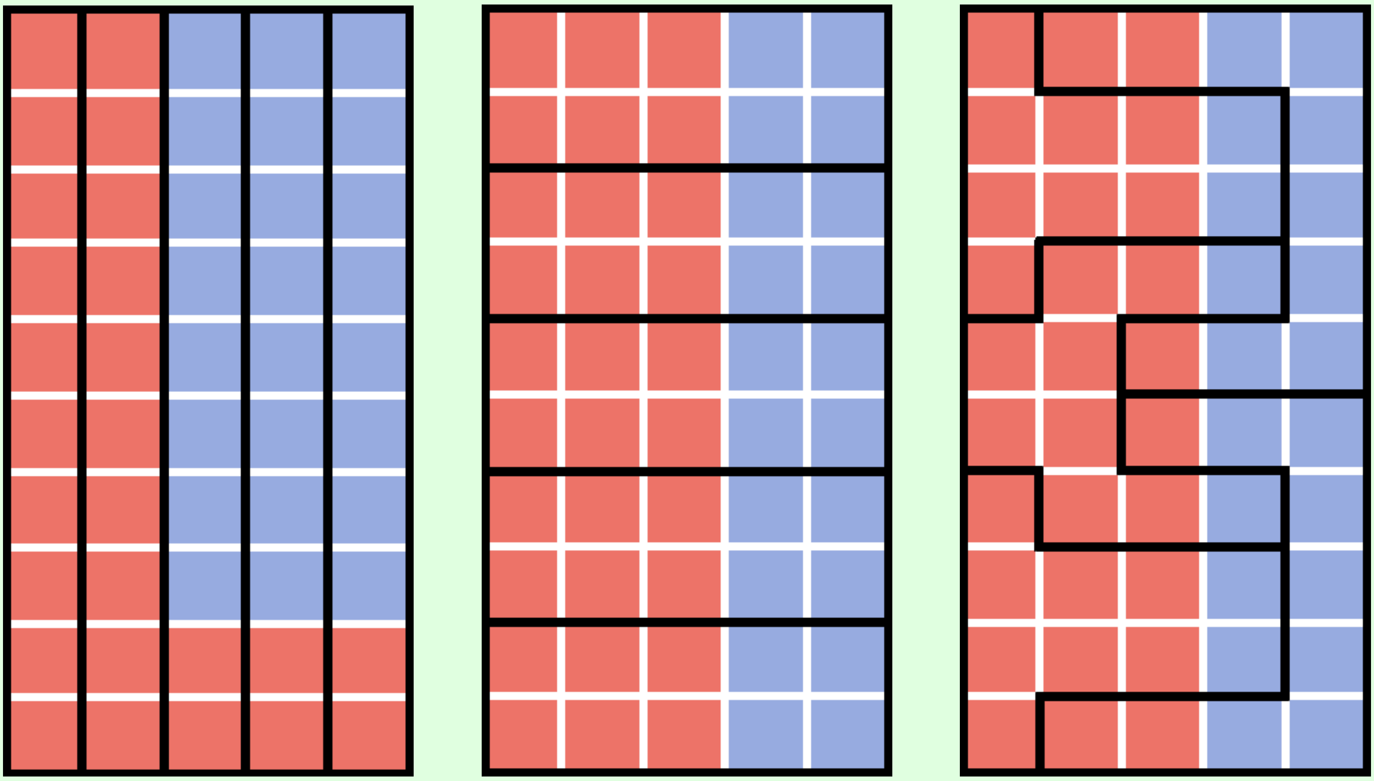
Lösung 17

Der große Kreis hat eine Fläche von 4π, der kleine von π und das Quadrat hat ebenfalls eine Fläche von π. Die Gesamtfläche beträgt also 6π. Der Konvexitätskoeffizient ist somit $\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{18}{36} = 0.5.$

Lösung 18

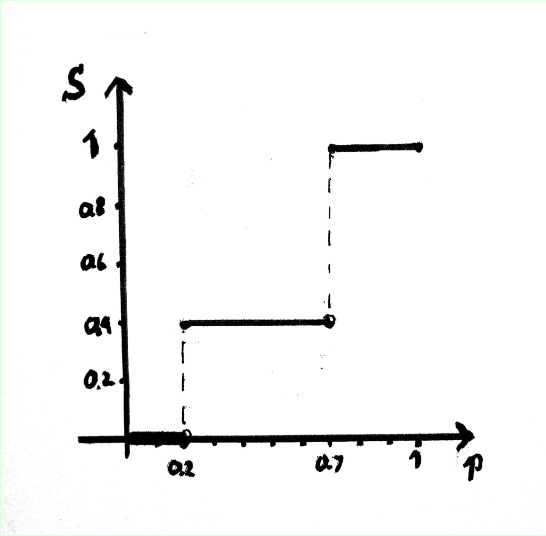
Die verschiedenen Bezirke haben insgesamt drei verschiedene Formen. Wir berechnen also drei Konvexitätskoeffizienten.
Die erste Form ist die des Bezirks in der oberen linken Ecke. Wir zählen 6 Verbindungsstrecken, die außerhalb der Figur verlaufen. Insgesamt gibt es $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot (10-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = \frac{90}{2} = 45$ Strecken. Der Konvexitätskoeffizient ist also $\frac{45-6}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$.
Als zweite Form wählen wir die des Bezirks in der oberen rechten Ecke. Wir zählen 21 Verbindungsstrecken, die die Form nicht verlassen. Der Konvexitätskoeffizient ist damit $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.
Zuletzt bestimmen wir den Konvexititäskoeffizienten des Bezirks in der Mitte der Abbildung. Wir zählen 29 Verbindungsstrecken, die vollständig innerhalb liegen, sodass wir als Konvexitätskoeffizienten $\frac{29}{45}$ erhalten.

Lösung 19



Für die erste Wahlbezirkseinteilung ist $S_{-2000} = 3$ und $Q_{-2000} = 0.6$.
Für die zweite Wahlbezirkseinteilung ist $S_{-2000} = 0$ und $Q_{-2000} = 0$.
Für die drittte Wahlbezirkseinteilung ist $S_{-2000} = 2$ und $Q_{-2000} = 0.4$.

Lösung 20



Lösung 21

Nein. Die Höhe relativ zu 0.5 ist -0.1, wie aus der Lösung der vorherigen Aufgabe hervorgeht.

Lösung 22

Die Summe der verlorenen und überzähligen Stimmen für die blaue Partei beträgt $20\,000$. Die Anzahl der verlorenen und überzähligen Stimmen der roten Partei beträgt 5000. Somit gilt $E = \frac{20\,000 - 5000}{50\,000} = 0.3$.