34. Mathematik-Turnier

Staffel

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Heute, am 19 September 2025, ist Emmas Geburtstag. Ihr neues Alter ist jetzt die Summe der Ziffern ihres Geburtsjahrs.

Finden Sie alle Möglichkeiten für Emmas Alter.

Anmerkung: In der Wissenschaft ist allgemein anerkannt, dass der „Big Bang“ vor etwa 14 Milliarden Jahren stattfand. Sie können davon ausgehen, dass Emma danach geboren wurde.

Ausarbeitung Aufgabe 1

Wir bezeichnen die Summe der Ziffern von Emmas Geburtsjahr x mit $s(x)$. Es gilt dann:

$$2025 - x = s(x).$$

Wenn $x < 1900$, dann folgt für die Ziffernsumme des Geburtsjahrs $s(x) > 125$, was nur möglich wäre, wenn x kleiner als $-89{,}999{,}999{,}999{,}999$ wäre. Aber das ist unmöglich (laut Hinweis; aber auch ohne Hinweis wäre die Gleichung $2005 - x = s(x)$ dann nicht lösbar).

Wenn $x \geq 1900$ ist, dann ist die Ziffernsumme $s(x)$ höchstens 28 (das Maximum erhält man für das Jahr 1999). Daher ist das Geburtsjahr $x = 2025 - s(x) \geq 1997$.

Wir machen eine Fallunterscheidung nach den ersten zwei Ziffern von Emmas Geburtsjahr.

Fall 1. Sei Emmas Geburtsjahr von der Form $\overline{20ab} = 2000 + 10a + b$. Da Emmas jetziges Alter gleich der Ziffernsumme des Geburtsjahrs ist, gilt

$$2025 - (2000 + 10a + b) = 2 + 0 + a + b,$$

und nach umformen,

$$11a + 2b = 23.$$

Es sind $a \in \{0, 1, 2\}$ und $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Für $a = 0$ und $a = 2$ gibt es keine Lösung für b; für $a = 1$ folgt $b = 6$.

Fall 2. Sei Emmas Geburtsjahr von der Form $\overline{19ab} = 1900 + 10a + b$ mit $a,\, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Dann gilt:

$$2025 - (1900 + 10a + b) = 1 + 9 + a + b,$$

und nach Umformen:

$$11a + 2b = 115.$$

Für $a < 9$ gibt es keine Lösungen. Die einzige Lösung ist $a = 9$ and $b = 8$.

Selbstverständlich kann man sich den Fall 2 auch sparen und einfach die drei noch möglichen Lösungen 1997, 1998 und 1999 einzeln ausprobieren.

Insgesamt gibt es nur zwei Möglichkeiten: entweder Emma wurde 2016 geboren und ist heute 9 Jahre alt oder sie wurde 1998 geboren und ist heute 27 Jahre alt.

Aufgabe **2** (20 Punkte)

Bestimmen Sie die kleinste Lösung der folgenden quadratischen Gleichung.

$$\left(\frac{x - 5^2}{2^2 \cdot 5^2} + 5^2\right)^2 = x$$

Ausarbeitung Aufgabe **2**

Wir multiplizieren die Gleichung mit $100^2 = 10000$ und erhalten

$$(x - 25 + 2500)^2 = 10000x.$$

Ausmultiplizieren der linken Seite ergibt

$$x^2 + 4950x + 2475^2 = 10000x.$$

Durch Umformen erhalten wir daraus

$$x^2 - 5050x + 2475^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir (z.B. mit pq-Formel) und erhalten

$$x_{12} = \frac{5050 \pm \sqrt{5050^2 - 4950^2}}{2} = \frac{5050 \pm 1000}{2} = 2525 \pm 500.$$

Die kleinste Lösung ist also 2025.

Alternative Lösung (mit kleineren Zahlen): Wir setzen

$$y = \frac{x - 5^2}{2^2 \cdot 5^2} + 5^2 = \frac{x - 25}{100} + 25$$

so dass die Gleichung die Form $y^2 = x$ hat. Einsetzen von $x = y^2$ auf der rechten Seite liefert die Gleichung

$$y = \frac{y^2 - 25}{100} + 25$$

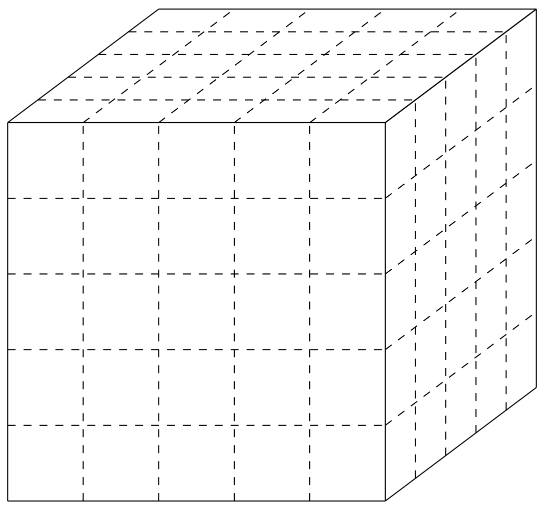
und diese ist äquivalent zu $y^2 - 100y + 2475 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$y = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 4 \cdot 2475}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9900}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{100 \pm 10}{2},$$

also gleich 55 oder 45. Auflösen nach x in der Definition von y ergibt $x = 100(y-25)+25$. Das kleinste x erhalten wir für das kleinste y, also $x = 100(45 - 25) + 25 = 2000 + 25 = 2025$.

Aufgabe **3** (30 Punkte)

Wir wollen einen Würfel mit 5 cm Kantenlänge aus kleineren Würfeln mit Kantenlängen 1, 2 und 3 cm konstruieren.



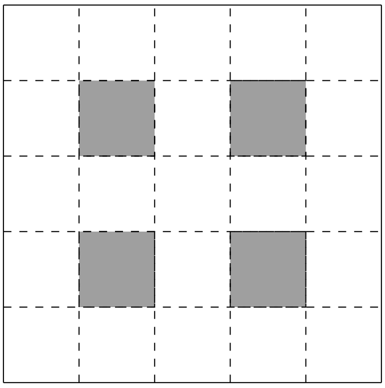
Wie viele kleinere Würfel werden mindestens gebraucht?

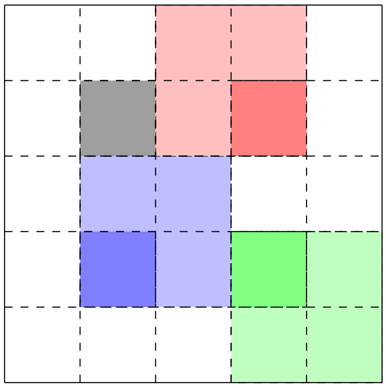
Ausarbeitung Aufgabe **3**

Es ist erstmal klar, dass höchstens ein 3cm-Würfel benutzt werden kann.

Stellen wir uns den 5cm-Würfel in einem Koordinatensystem vor, wobei der Mittelpunkt im Ursprung liegt und die Kanten parallel zu den Achsen sind. Die 125 1cm-Würfel bezeichnen wir nach den Koordinaten ihrer Mittelpunkte: Der 1cm-Würfel im Zentrum hat dann die Koordinaten $(0, 0, 0)$, und die acht 1cm-Würfel in den Ecken haben die Koordinaten $(2, 2, 2)$, $(2, 2, -2)$, …, $(-2, -2, -2)$.

Jeder 2cm-Würfel deckt eine (und genau einen) derjenigen 1cm-Würfel ab, die nur Koordinaten mit Werten $\{-1, 1\}$ besitzen (von diesen gibt es acht Stück). Anbei ein Schema von der analogen Situation in zwei Dimensionen.





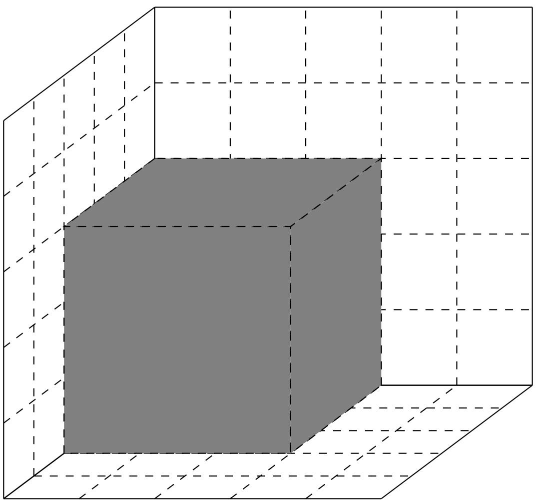
Ein 3cm-Würfel deckt ebenfalls mindestens einen derjenigen 1cm-Würfel ab, die nur Koordinaten aus $\{-1, 1\}$ besitzen. Er deckt genau einen dieser 1cm-Würfel mit ± 1-Koordinaten ab, wenn er komplett an einer Ecke liegt. In allen anderen Fällen deckt er sogar mehr dieser 1cm-Würfel mit ± 1-Koordinaten ab, und er kann sogar alle acht abdecken, wenn er im Ursprung zentriert ist.

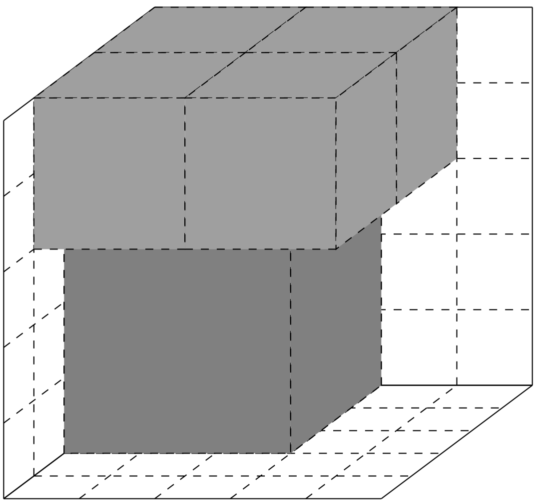
Wenn kein 3cm-Würfel verwendet wird, kann es demnach höchstens 8 2cm-Würfel geben, die $8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ 1cm-Würfel abdecken. Es sind dann $125 - 64 = 61$ 1cm-Würfel notwendig, um den Rest zu füllen. In diesem Fall verwenden wir $8 + 61 = 69$ Würfel.

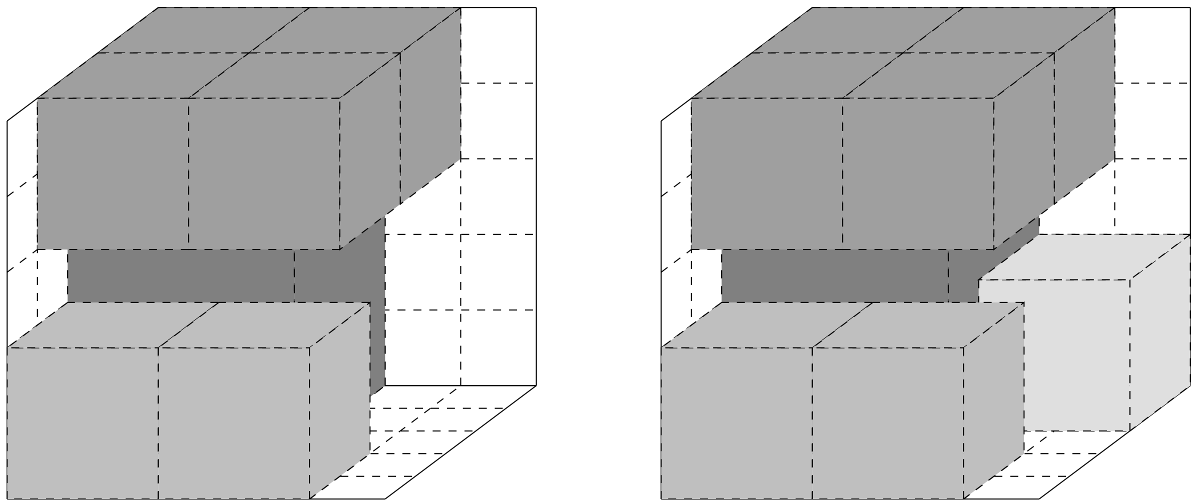
Wenn wir doch einen 3cm-Würfel verwenden, kann es höchstens 7 2cm-Würfel geben. Diese decken $3 \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 83$ 1cm-Würfel ab. Für den Rest brauchen wir $125 - 83 = 42$ 1cm-Würfel. Insgesamt verwenden wir in diesem Fall $1 + 7 + 42 = 50$ Würfel, also weniger.

Mit 50 Würfeln kann es folgenderweise auch tatsächlich geschafft werden:

- Ein 3cm-Würfel an einer Ecke.
- Vier 2cm-Würfel an einer Seite des 3cm-Würfels (diese somit überragend, siehe Skizze), weitere zwei 2cm-Würfel an einer anderer Seite des 3cm-Würfels, und zuletzt den letzten 2cm-Würfel an der noch freien Seite des 3cm-Würfels.
- Den Rest mit den 42 1cm-Würfeln auffüllen.



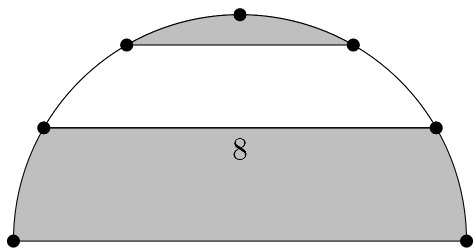




Eine Möglichkeit mit einem 3cm-Würfel und sieben 2cm-Würfeln.

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Wir platzieren 7 Punkte in gleichem Abstand auf einem Halbkreis, wie im folgenden Bild. Der Abstand zwischen dem zweiten und sechsten Punkt, gemessen durch das Innere des Halbkreises, ist 8. Wir betrachten die grau gefärbten Bereiche des Halbkreises, den Bereich unterhalb der horizontalen Linie zwischen dem zweiten und sechsten Punkt und den Bereich oberhalb der horizontalen Linie zwischen dem dritten und fünften Punkt.

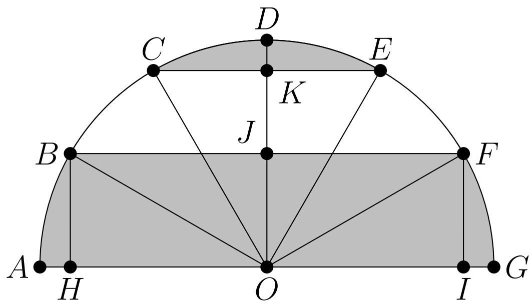


Bestimmen Sie den Flächeninhalt des grau gefärbten Bereichs des Halbkreises.

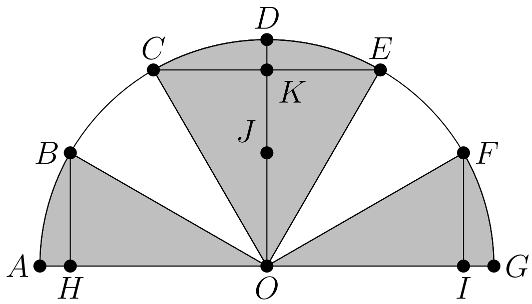
Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\frac{a}{b}\pi$, mit teilerfremden ganzen Zahlen a und b (d.h. der Bruch $\frac{a}{b}$ ist vollständig gekürzt).

Ausarbeitung Aufgabe 4

Wir bezeichnen die Punkte $A - O$ wie im folgenden Bild. Dabei sind H und I die orthogonalen Projektionen von B und F auf die x-Achse.



Die Dreiecke JFO, JBO, KOE und KOC sind alle kongruent. Wir konstruieren eine neue grau gefärbte Fläche mit gleichem Flächeninhalt wie folgt: Wir entfernen das Dreieck JFO und legen es auf das Dreieck KOC, und wir entfernen JBO und legen es auf KOE. Dann erhalten wir den folgenden grau gefärbten Bereich, bestehend aus 4 der 6 Sektoren des Halbkreises.



Insbesondere ist der Flächeninhalt dieser neuen grau gefärbten Fläche 2/3 der Fläche des Halbkreises.

Um den Flächeninhalt des Halbkreises zu bestimmen, berechnen wir den Radius r. Der Winkel FOJ ist 60 Grad, und die Länge von FJ ist 4, also ist der Radius die Länge von FO, und diese ist gleich

$$r = \frac{4}{\sin(\pi/3)} = \frac{4}{\sqrt{3}/2} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Der Flächeninhalt des Halbkreises ist daher $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{32}{3}\pi$ und der Flächeninhalt des grau gefärbten Bereichs $\frac{2}{3} \cdot \frac{32}{3}\pi = \frac{64}{9}\pi$.

Aufgabe **5** (20 Punkte)

Wir betrachten alle Wörter der Länge 6, die aus den Buchstaben M, A, T and H gebildet werden können. Ein Wort ist hierbei nur eine Folge von Buchstaben, eine semantische Bedeutung wird nicht verlangt.

Wie viele solche Wörter gibt es, in denen gleich viele "M"s und "A"s vorkommen?

Ausarbeitung Aufgabe **5**

Wir kodieren "M" mit 00, "A" mit 11, 'T' mit 01 und "H" mit 10. Dann sind die gesuchten Wörter binäre Folgen der Länge 12 mit derselben Anzahl von Nullen und Einsen. Als

Anzahl erhalten wir
$$\binom{12}{6} = 924$$
Wörter (wähle die sechs Positionen der Nullen aus den zwölf Positionen in der Folge).

Alternative Lösung:

- Kein M und kein A: $2^6 = 64$
- Ein M und ein A: $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot 2^4 = 480$
- Zwei M's und zwei A's: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2^2 = 360$
- Drei M's und drei A's: $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20$

Insgesamt: $64 + 480 + 360 + 20 = 924$

Aufgabe **6** (20 Punkte)

Für eine Funktion f gelten die Gleichungen $f(1) = 3$ und $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle ganzen Zahlen x, y.

Bestimmen Sie den Wert $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$.

Ausarbeitung Aufgabe **6**

Aus den Voraussetzungen erhalten wir
$$\begin{aligned}
&f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 9,\\
&f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) = 9 \cdot 3 = 27,\\
&3 = f(1 + 0) = f(1) \cdot f(0) = 3 \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1.
\end{aligned}$$
Daraus folgt
$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40.$$

Aufgabe **7** (20 Punkte)

Zwei gute Freunde, Alice und Bob, gehen an dem selben Abend in die selbe Bar, ohne zu wissen, dass der/die andere auch dorthin geht. Beide betreten die Bar jeweils zu einem zufälligen Moment zwischen 21:00 und 22:00, und beide verlassen die Bar wieder nach 15 Minuten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob sich in der Bar treffen?

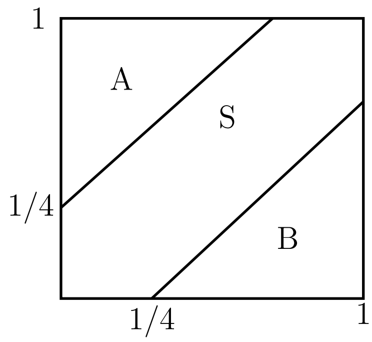
Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\frac{a}{b}$, mit teilerfremden ganzen Zahlen a and b (d.h. der Bruch ist vollständig gekürzt).

Ausarbeitung Aufgabe **7**

Wir bezeichnen mit a die Zeitspanne nach 21:00, gemessen in Stunden, zu der Alice die Bar betritt und mit b die Zeitspanne nach 21:00 (in Stunden), zu der Bob die Bar betritt. Da Alice und Bob vor 22:00 ankommen, ist die maximale Zeitspanne eine Stunde, daher ist der Punkt mit Koordinaten (a, b) ein zufälliger Punkt im Einheitsquadrat. Alice und Bob verlassen die Bar nach 15 Minuten wieder. Daher treffen sich Alice und Bob in der Bar genau dann, wenn (a, b) im Streifen

$$S = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \, ; \, |x - y| \leq 1/4\}$$

um die Hauptdiagonale liegt.

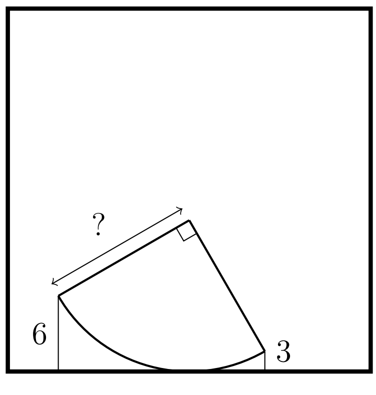


Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gleich dem Flächeninhalt von S. Mit den Bezeichnungen im Bild ist der Flächeninhalt von S gleich 1 minus der Summe der Flächeninhalte der Dreicke A und B. Zusammengesetzt ergeben die Dreiecke ein Quadrat mit Seitenlänge 3/4. Also ist der Flächeninhalt von S (und die gesuchte Wahrscheinlichkeit) gleich

$$1 - (3/4)^2 = 1 - 9/16 = 7/16.$$

Aufgabe **8** (30 Punkte)

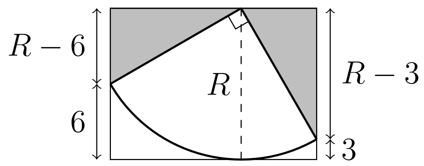
Ein Pizzastück hat die Form eines Viertelkreises und berührt eine Seite einer großen Pizzabox wie im folgenden Bild. Die Enden des gebogenen Teils der Pizza (der Kruste) haben Abstand 6 und 3 zum Rand der Pizzabox.



Bestimmen Sie den Radius des Pizzastücks (die Länge der Strecke mit dem Fragezeichen im Bild).

Ausarbeitung Aufgabe 8

Wir bezeichnen den Radius des Pizzastücks mit R und betrachten das folgende Rechteck mit Höhe R.



Die zwei grau gefärbten rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich, da sie dieselben Winkel haben. Da sie außerdem beide eine Hypotenuse der Länge R haben, sind sie kongruent. Der Satz von Pythagoras in einem der Dreiecke liefert

$$(R-6)^2 + (R-3)^2 = R^2$$

und das ist äquivalent zu

$$R^2 - 18R + 45 = 0.$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $R = 15$ und $R = 3$. Aus der Aufgabenstellung ist klar, dass $R > 6$. Die einzige Lösung ist also $R = 15$.

Aufgabe 9 (30 Punkte)

Alberto hat 756 Kirschen vom Kirschbaum seiner Großeltern gepflückt. Er teilt sie gleichmäßig unter sich und seinen Freunden auf. Drei seiner Freunde sind nicht besonders hungrig und geben ein Viertel ihrer Kirschen zurück an Alberto. Alberto hat einen Riesenhunger und isst zusätzlich zu seinen Kirschen auch die zurückgegebenen Kirschen. Als er damit fertig ist, stellt er fest, dass er mindestens 150 Kirschen gegessen hat.

Wie viele Kirschen hat Alberto gegessen? Dabei nehmen wir an, dass zu keiner Zeit einzelne Kirschen in Stücke geteilt werden.

Ausarbeitung Aufgabe 9

Mit n bezeichnen wir die Anzahl der Personen, unter denen die Kirschen verteilt werden, d.h. Alberto hat $n-1$ Freunde. Es ist $n \geq 4$, da drei Freunde Kirschen an Alberto zurück geben. Da die erste gleichmäßige Aufteilung aufgeht (ohne dass Kirschen in Stücke geteilt werden), muss n ein Teiler von $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ sein, und jede Person erhält $\frac{756}{n}$ Kirschen. Da drei Freunde Alberto jeweils ein Viertel ihrer Kirschen zurück geben (und auch hier keine Kirsche in Stücke geteilt werden), muss die Anzahl $\frac{756}{n}$ durch $4 = 2^2$ teilbar sein, also muss n ein Teiler von $3^3 \cdot 7$ sein.

Insgesamt hat Alberto

$$\frac{756}{n} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{756}{n} = \frac{7}{4} \cdot \frac{756}{n} \geq 150$$

Kirschen gegessen. Umstellen der Ungleichung nach n ergibt $n \leq \frac{7}{4} \cdot \frac{756}{150} = 8.82$. Der einzige Teiler n von $3^3 \cdot 7$ mit $4 \leq n \leq 8.82$ ist $n = 7$, also hat Alberto $\frac{7}{4} \cdot \frac{756}{7} = \frac{756}{4} = 189$ Kirschen gegessen.

Aufgabe **10** (20 Punkte)

Der Herzog von Fleury-de-la-mer besitzt 25 Pferde. Er würde gerne wissen, welche drei Pferde am schnellsten sind. In seiner Rennbann können bis zu 5 Pferde gleichzeitig rennen, aber er hat weder eine Stoppuhr noch irgendein anderes Gerät, um die Rennzeiten zu messen. Er beschließt, einige Rennen jeweils mit 5 Pferden zu organisieren.

Was ist die kleinste Anzahl von Rennen, die gehalten werden müssen, um die drei schnellsten Pferde zu bestimmen?

Ausarbeitung Aufgabe **10**

Um irgendeine Information über alle Pferde zu bekommen, muss jedes Pferd mindestens einmal ein Rennen bestritten haben. Dies kann mit 5 Rennen geschafft werden, indem die 25 Pferde zufällig in 5 Gruppen verteilt werden und pro Gruppe ein Rennen abgehalten wird.

Nach den ersten 5 Rennen ist folgendes klar:

- Das schnellste Pferd ist der Gewinner einer der 5 Rennen.
- Die 4. und 5. Pferde jedes Rennens können nicht unter den schnellsten 3 Pferden sein.

Nun wird ein 6. Rennen mit den Gewinnern der 5 ersten Rennen gehalten. Der Gewinner dieses Rennens ist offenbar das allerschnellste Pferd.

Sei $1 \leq n \leq 5$ das Rennen, in dem das schnellste Pferd zuerst gerannt ist. Das zweitschnellste Pferd ist entweder das 2. Pferd im 6. Rennen oder das 2. Pferd im Rennen n.

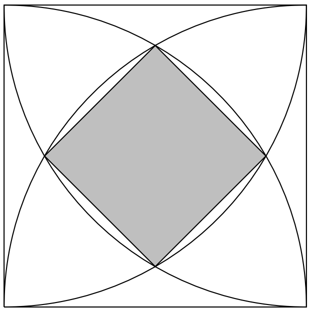
Sei nun $1 \leq m \leq 5$ das Rennen, in dem das zweitschnellste Pferd im 6. Rennen am Anfang gerannt ist (insbesondere ist $m \neq n$). Für das drittschnellste Pferd gibt es dann folgende Möglichkeiten:

- Das zweite oder dritte Pferd im 6. Rennen.
- Das zweite oder dritte Pferd im Rennen n (falls die drei schnellsten Pferden vom Anfang an in der Gruppe n waren).
- Das zweite Pferd im Rennen m.

Diese Möglichkeiten für das drittschnellste Pferd enthalten somit auch die zwei Möglichkeiten für das zweitschnellste Pferd. Es reicht also, ein 7. Rennen mit den 5 Pferden aus der obigen Liste zu halten. Das erst- bzw. zweitschnellste Pferd in diesem 7. Rennen ist das zweit- bzw. drittschnellste Pferd von allen 25 Pferden.

Aufgabe **11** (30 Punkte)

In einem Quadrat mit Flächeninhalt 1 verbinden vier Viertelkreise jeweils gegenüberliegende Ecken des Quadrats, wie im folgenden Bild. Die vier Schnittpunkte der Viertelkreise bilden die Eckpunkte eines kleineren Quadrats innerhalb des großen Quadrats.



Bestimmen Sie den Flächeninhalt des kleinen Quadrats.

Geben Sie Ihre Antwort in der Form $a+b\sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen a, b und einer positiven, quadratfreien ganzen Zahl c.

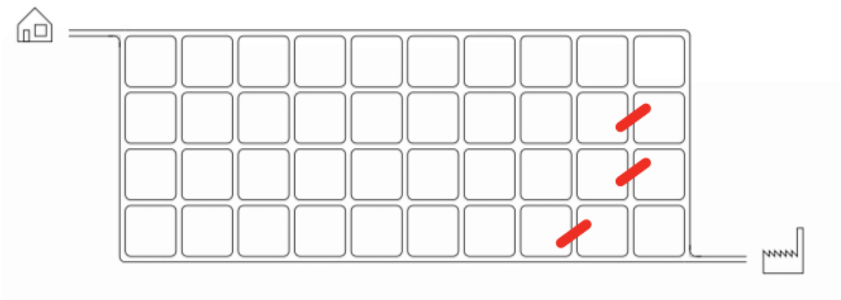
Ausarbeitung Aufgabe 11

Das große Quadrat liege im üblichen Koordinatensystem, wobei die linke untere Ecke im Ursprung liege. Die obere Ecke des kleinen Quadrats ist dann der Durchschnitt von $y = \sqrt{1-x^2}$ und $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Gleichsetzen liefert $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aus Symmetriegründen ist die rechte Ecke des kleinen Quadrats dann $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sei L der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, also die Seitenlänge des kleinen Quadrats. Dann ist L^2 der Flächeninhalt des kleinen Quadrats und der berechnet sich zu

$$L^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Aufgabe 12 (30 Punkte)

Jakob weiß, dass es normalerweise $\binom{14}{4} = 1001$ kürzeste Wege von zu Hause zu seinem Arbeitsplatz gibt. Unglücklicherweise sind heute einige Straßenabschnitte gesperrt, wie im folgenden Bild eingezeichnet.

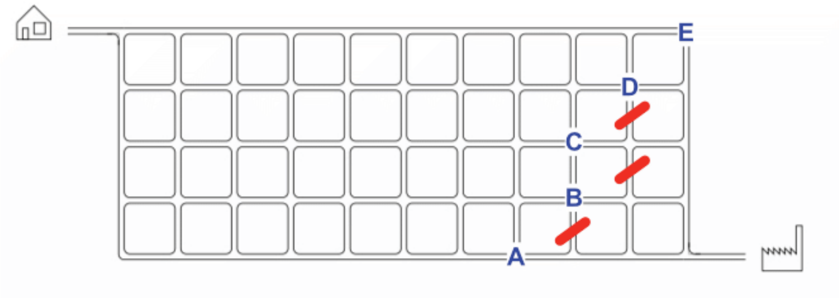


Wie viele Wege stehen Jakob heute noch zur Verfügung?

Ausarbeitung Aufgabe 12

Die noch verfügbaren kürzestmöglichen Wege teilen sich in mehrere Fälle auf (Bezeichnungen wie im folgenden Bild):

1. Wege durch A,
2. Wege durch B,
3. Wege durch C, aber nicht durch B,
4. Wege durch D
5. Wege durch E.



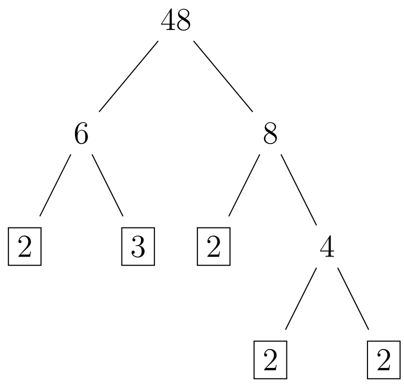
Es gibt

1. $\binom{11}{4} = 330$,
2. $\binom{11}{3} \cdot 2 = 330$,
3. $\binom{10}{2} = 45$,
4. $\binom{10}{1} = 10$,
5. $\binom{10}{0} = 1$

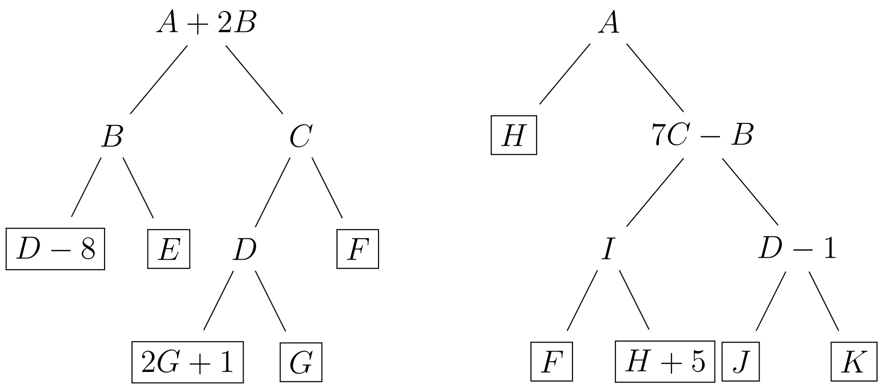
solcher Wege, insgesamt also $330 + 330 + 45 + 10 + 1 = 716$.

Aufgabe 13 (30 Punkte)

Ein Faktorisierungsbaum visualisiert die Primfaktorzerlegung einer positiven ganzen Zahl: faktorisiere die Zahl in zwei Faktoren und wiederhole das Vorgehen für jeden Faktor, der keine Primzahl ist. Markieren wir alle Primzahlen in dem Baum mit einer Box, so erhalten wir die Primfaktorzerlegung der Ausgangszahl. Als Beispiel hier ein Faktorisierungsbaum für die Zahl 48:



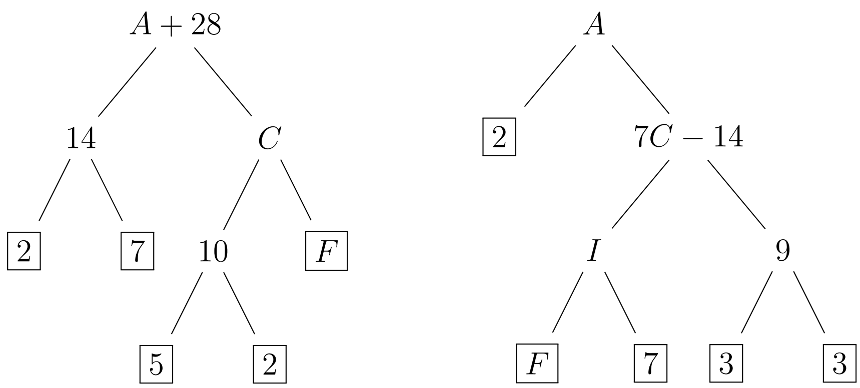
Wir betrachten die folgenden zwei Faktorisierungsbäume, wobei die Buchstaben $A, B, \ldots, K$ positive ganze Zahlen sind. Verschiedene Buchstaben können dabei auch dieselbe Zahl bezeichnen.



Bestimmen Sie den Wert von A.

Ausarbeitung Aufgabe 13

In dem rechten Baum sind H and $H+5$ Primzahlen. Da eine der beiden Zahlen gerade ist, folgt $H = 2$. Damit folgt aus der obersten Faktorisierung in den beiden Bäumen $A + 2B = BC$ und $A = 2(7C - B)$. Auflösen der Gleichungen nach A und gleichsetzen ergibt $B = 14$. Im linken Baum sehen wir, dass die Primfaktoren von $B = 14$ gegeben sind durch $D - 8$ and E. Es gibt zwei Fälle, nämlich $(D, E) = (10, 7)$ oder $(D, E) = (15, 2)$. Weiter unten im linken Baum sehen wir, dass G and $2G+1$ die Primfaktoren von D sind. Das schließt den Fall $D = 15$ aus, d.h. wir sind im ersten Fall mit $D = 10$, $E = 7$ und $G = 2$. Im rechten Baum sehen wir, dass J and K die Primfaktoren von $D - 1 = 9$ sind und wir erhalten $J = 3$ und $K = 3$. Wir tragen die bisher gesammelten Informationen in die Bäume ein:



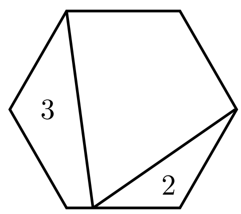
Aus diesen beiden Bäumen ergeben sich folgende Primfaktorzerlegungen:

$$A + 28 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot F \quad \text{und} \quad A = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot F.$$

Auflösen nach A und gleichsetzen liefert $140F - 28 = 126F$ und dann $F = 2$ und $A = 252$. (Zur Vervollständigung der Bäume: es folgt noch $C = 20$ und $I = 14$.)

Aufgabe **14** (20 Punkte)

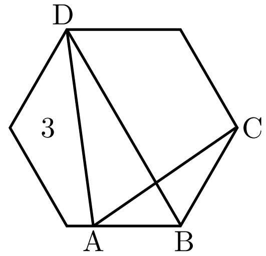
In einem regulären Sechseck verbinden wir zwei Ecken mit einem Punkt auf einer der Seiten wie im folgenden Bild. Der Flächeninhalt des Bereichs auf der linken Seite ist 3, der Flächeninhalt des Bereichs rechts unten ist 2.



Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Sechsecks.

Ausarbeitung Aufgabe **14**

Wir bezeichnen die Punkte wie im folgenden Bild.



Die Dreiecke ABC und ABD haben dieselbe Grundseite AB. Die Höhe von ABD ist zweimal die Höhe von ABC (betrachte die Höhe des Sechsecks), also hat ABD den Flächeninhalt 4.

Die Hälfte des Flächeninhalts des Sechsecks ist 3 plus dem Flächeninhalt des Dreiecks ABD, also gleich $3 + 4 = 7$. Dann ist der Flächeninhalt des gesamten Sechsecks gleich $2 \cdot 7 = 14$.

Aufgabe **15** (20 Punkte)

In der Gleichung

$$AB \cdot CB = DDD$$

bezeichnen die Buchstaben A, B, C, D verschiedene Dezimalziffern.

Bestimmen Sie die Summe $A + B + C + D$.

Ausarbeitung Aufgabe **15**

Da die Buchstaben verschiedene Ziffern bezeichnen, ist die triviale Lösung $A = B = C = D = 0$ nicht erlaubt.

Da 111 die Primfaktorzerlegung $111 = 3 \cdot 37$ hat, gilt $DDD = D \cdot 3 \cdot 37$. Daher muss einer der Faktoren auf der linken Seite der Gleichung ein zweistelliges Vielfaches von 37 sein. Bis auf Symmetrie (vertausche AB and CB) ist also $AB = 37$ or $AB = 74$.

Wenn $AB = 74$ ist, dann endet $AB \cdot CB = 74 \cdot C4 = DDD$ mit der Ziffer $D = 6$. Aber dann ist

$$CB = \frac{DDD}{AB} = \frac{666}{74} = 9$$

ein Widerspruch zu $B = 4$.

Wenn $AB = 37$ ist, dann endet $AB \cdot CB = 37 \cdot C7$ mit der Ziffer $D = 9$. Wir erhalten dann die Gleichung

$$37 \cdot 27 = 999$$

also ist $A = 3$, $B = 7$, $C = 2$, $D = 9$ and $A + B + C + D = 21$.

Aufgabe **16** (30 Punkte)

Die Finanzverwaltung eines Staates möchte die Anzahl der Arten der in ihrer Währung verfügbaren Münzen reduzieren. Der Vorschlag ist, in Zukunft nur noch Münzen im Wert von 5 ct und 23 ct auszugeben. Die Bevölkerung protestiert, da es dadurch unmöglich würde, genaue Beträge in bar zu bezahlen. Aber der Finanzminister behauptet, dass dieses Problem nur für kleine Beträge entstehen würde, alle genügend großen Beträge könnten weiterhin exakt in bar bezahlt werden mit den 5 ct und 23 ct Münzen.

Welches ist der größte Betrag, der nicht mit den neuen Münzen exakt bezahlt werden kann?

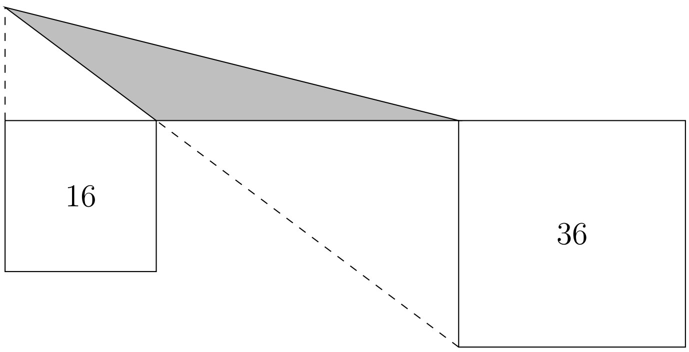
Ausarbeitung Aufgabe **16**

Wir betrachten die letzten Ziffern der Beträge. Durch die 5 ct Münzen können alle Beträge exakt bezahlt werden, die mit den Ziffern 5 oder 0 enden. Mit der 23 ct Münze können wir 23 ct und 23 ct+5 ct=28 ct exakt bezahlen und mit weiteren 5 ct Münzen dann auch alle größeren Beträge, die mit den Ziffern 3 oder 8 enden. Mit zwei 23 ct Münzen können wir 46 ct=23 ct+23 ct und 46 ct+5 ct=51 ct exakt bezahlen und mit weiteren 5 ct Münzen dann auch alle größeren Beträge, die mit 6 oder 1 enden. Mit drei 23 ct Münzen können wir 69 ct=(23+23+23) ct und 69 ct+5 ct=74 ct exakt bezahlen und mit weiteren 5 ct Münzen dann auch alle größeren Beträge, die mit den Ziffern 9 oder 4 enden. Mit vier 23 ct Münzen können wir 92 ct=(23+23+23+23) ct und 92 ct+5 ct=97 ct exakt bezahlen und mit weiteren 5 ct Münzen dann auch alle größeren Beträge, die mit den Ziffern 2 oder 7 enden.

In den obigen Betrachtungen haben wir alle möglichen letzten Ziffern betrachtet. Also ist 87 ct der größte Betrag, der mit den neuen Münzen nicht exakt bezahlt werden kann.

Aufgabe **17** (20 Punkte)

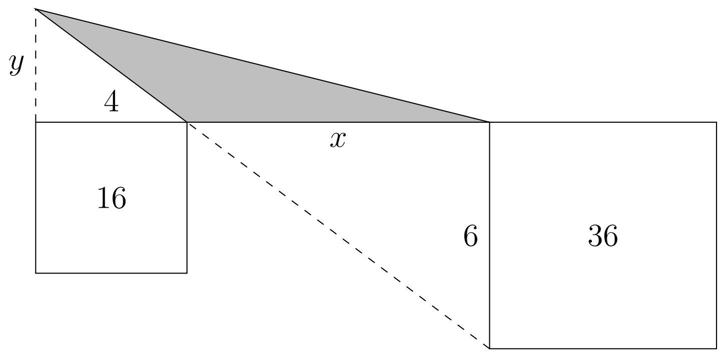
Zwei Quadrate mit Flächeninhalten 16 and 36 werden benutzt, um ein Dreieck zu bilden, wobei die oberen Seiten der Quadrate auf einer Linie liegen, wie im folgenden Bild.



Bestimmen Sie den Flächeninhalt des grau gefärbten Dreiecks. (Hinweis: Er ist unabhängig vom Abstand der beiden Quadrate, solange dieser positiv ist.)

Ausarbeitung Aufgabe **17**

Sei x der Abstand zwischen den beiden Quadraten, d.h. x ist die Grundseite des grauen Dreiecks. Sei y die Höhe des grauen Dreiecks, dann ist der gesuchte Flächeninhalt $xy/2$.



Die Dreiecke links und unterhalb des grauen Dreiecks sind ähnlich, daher gilt

$$\frac{y}{4} = \frac{6}{x}.$$

Umformen ergibt $xy = 24$ und für den gesuchten Flächeninhalt $xy/2 = 12$.

Alternative Lösung: Benutzen wir den Hinweis in der Aufgabe, dann können wir den Abstand x so wählen, dass gleichschenklige Dreiecke entstehen (z.B. $x = 6$ and $y = 4$). Dann folgt sofort für den Flächeninhalt $xy/2 = 12$.

Aufgabe **18** (20 Punkte)

Finden Sie alle Paare (a, b) von positiven ganzen Zahlen $a \leq b$, so dass

$$\left(1 + \frac{2}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right) = 2.$$

Ausarbeitung Aufgabe **18**

Es ist $a \geq 3$, da beide Faktoren $1 + \frac{2}{a}$ and $1 + \frac{2}{b}$ kleiner als 2 sein müssen (da jeder Faktor größer als 1 ist).

Nach Voraussetzung ist $a \leq b$, also gilt

$$1 + \frac{2}{a} \geq 1 + \frac{2}{b}.$$

Damit folgt

$$\left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{2}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right) = 2$$

also

$$1 + \frac{2}{a} \geq \sqrt{2} \approx 1,414.$$

Daraus schließen wir $1 \leq a \leq 4$, und zusammen mit der ersten Beobachtung ergibt sich, dass $a = 3$ oder $a = 4$ ist.

Für $a = 3$ erhalten wir

$$2 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right),$$

und dann ist $b = 10$.

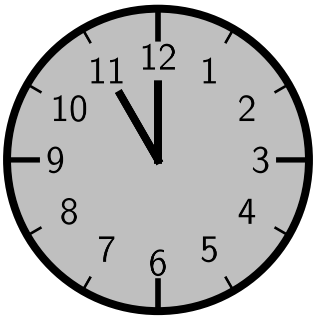
Für $a = 4$ erhalten wir

$$2 = \left(1 + \frac{2}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right),$$

und dann ist $b = 6$.

Aufgabe **19** (30 Punkte)

Eine seltsame Uhr hat gleichlange Stunden- und Minutenzeiger.



Die Zeiger bewegen sich gleichmäßig (der Minutenzeiger springt also nicht alle 60 Sekunden). Wie oft ist es innerhalb einer 24-Stunden-Periode nicht möglich, die exakte Zeit anhand der Stellung der Zeiger zu bestimmen, wenn dabei nicht zwischen AM und PM unterschieden werden muss?

Ausarbeitung Aufgabe **19**

Wenn sich der Stundenzeiger von der obersten Position x Grad auf der Uhr bewegt, dann bewegt sich der Minutenzeiger $y = 12x$ Grad. Bei einer zweideutigen Zeigerstellung muss also $x = 12y$ gelten. Die Werte x, y müssen daher die folgenden zwei Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 12x &\equiv y \mod 360 \\ 12y &\equiv x \mod 360. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt $x \equiv 144x \mod 360$, also $143x \equiv 0 \mod 360$ und somit

$$x = \frac{n \cdot 360}{143}\ ,\ n \in Z.$$

Wenn also der Stundenzeiger genau $n/143$ des Weges um die Uhr zurückgelegt hat, wobei n eine ganze Zahl zwischen 0 und 142 ist, dann haben wir eine zweideutige Zeigerstellung. Dies sind 143 mögliche Positionen.

Es gibt aber noch ein Problem. Das obige Argument berücksichtigt nicht die Situationen, in denen die beiden Zeiger exakt in derselben Position sind. Das passiert, wenn $x \equiv 12x \mod 360$ also wenn $11x \equiv 0 \mod 360$. Das passiert offenbar insgesamt 11 mal. Innerhalb einer 12-Stunden-Periode gibt es also $143 - 11 = 132$ zweideutige Zeiten. Für die 24-Stunden-Periode ergeben sich damit 264 zweideutige Zeiten.

Aufgabe **20** (30 Punkte)

Die Folge der Fibonacci-Zahlen beginnt mit 0 und 1, und jede folgende Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger. Wir schreiben die Fibonacci-Zahlen untereinander, wobei jede Zahl um eine Position nach rechts versetzt wird (wie im Bild unten). Untereinander stehende Ziffern werden jetzt mit Übertrag addiert (wobei der Übertrag wie üblich von rechts nach links übertragen wird). Zwischen der ersten und zweiten Ziffer wird ein Komma eingefügt.

0														
	1													
		1												
			2											
				3										
					5									
						8								
						1	3							
							2	1						
								3	4					
									5	5				
										8	9			
										1	4	4		
											2	3	3	
												…	…	…
0	1	1	2	3	5	9	5	5	0	5	…	…	…	…

Die so entstehende reelle Zahl 0.1123595505... ist eine rationale Zahl!

Bestimmen Sie für diese Zahl eine Darstellung als Quotient von zwei ganzen Zahlen. Geben Sie die Antwort in der Form $\frac{a}{b}$ *mit teilerfremden ganzen Zahlen a und b, d.h. der Bruch soll vollständig gekürzt sein.*

Ausarbeitung Aufgabe **20**

Wir bezeichnen mit a_n die n-te Fibonacci-Zahl, beginnend mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Nach Konstruktion ist die gesuchte rationale Zahl x gleich

$$
\begin{aligned}
x &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \\
&= 0 + 0.1 + \left(\frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots\right) = 0 + 0.1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \\
&= 0.1 + \left(\frac{a_0 + a_1}{100} + \frac{a_1 + a_2}{1000} + \cdots\right) = 0.1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{10^n} \\
&= 0.1 + \left(\frac{a_0}{100} + \frac{a_1}{1000} + \cdots\right) + \left(\frac{a_1}{100} + \frac{a_2}{1000} + \cdots\right) = 0.1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} \\
&= 0.1 + \frac{1}{100}\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots\right) = 0.1 + \frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \\
&= 0.1 + \frac{x}{10} + \frac{x}{100}.
\end{aligned}
$$

Umformen liefert $x = \dfrac{10}{89}$.

Alternative Lösung: Es gilt

$$10x - 1 = \sum_n \frac{a_{n+1}}{10^n},$$
$$100x - 11 = \sum_n \frac{a_{n+2}}{10^n}.$$

Daraus folgt

$$100x - 11 = x + (10x - 1)$$

und umformen liefert $x = \dfrac{10}{89}$.