

Internationales Mathematikturnier 2025 Aufgaben Sum of Us

19. September 2025

Liebe Teilnehmer*innen,

dieses Dokument enthält die Aufgaben für den ersten Teil des Internationalen Mathematikturniers 2025, die *Sum of Us*-Runde. Bevor ihr beginnt, empfehlen wir euch, die Anweisungen auf der nächsten Seite gründlich zu lesen.

Die Aufgaben wurden unter Begleitung von Stefan Hartmann und Rainer Kaenders von Nicola Hauptmann, Studentin an der Universität Bonn, im Rahmen ihrer Bachelorarbeit im Lehramtsstudiengang Mathematik erstellt.

Wir wünschen euch viel Erfolg!

Die Organisationsteams,
Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)
Michael Gruber, Thorsten Holm, Florian Leydecker & Victor González Alonso (Leibniz
Universität Hannover)
Niels Bonneux & Joeri Van der Veken (KU Leuven)
Peter Hochs & Sep Thijssen (Radboud Universiteit Nijmegen)
Michael Eichmair, Robin Gludovatz & Dmytro Rzhemuvskyi (Universität Wien)

Allgemeine Informationen

Antworten

- Schreibt eure Antworten auf die dafür vorgesehenen Antwortblätter.
- Vergesst nicht, auf jedes Antwortblatt eure Tischnummer zu schreiben!
- Reicht eure Antwortblätter bei den Korrektor*innen ein, lasst sie nicht auf dem Tisch liegen!

Punkteverteilung

Abschnitt 1: $20 + 20 + 30 = 70$

Abschnitt 2: $10 + 20 + 40 = 70$

Abschnitt 3: $10 + 60 + 30 = 100$

Abschnitt 4: $60 + 80 = 140$

Abschnitt 5: $90 + 30 = 120$

Die Maximalpunktzahl für diese Runde ist 500 Punkte. Die Minimalpunktzahl ist 0.

Wenn ihr eine Aufgabe falsch gerechnet habt und bei einer darauf aufbauenden Aufgabe eine folgerichtige Antwort gebt, wird diese Aufgabe trotzdem als falsch gewertet.

Erlaubte Hilfsmittel

- Schmierpapier, Stifte, Bleistift, Lineal.
- Ein nicht-grafikfähiger Taschenrechner.
- Das Vorbereitungsmaterial, inklusive der Antworten auf die Aufgaben darin.

1 Liger Aufgabe [70 Punkte]

Liger sind Hybride, die aus der Kreuzung eines männlichen Löwen und eines weiblichen Tigers hervorgehen. Liger und weitere Hybride von Großkatzen sollen zunächst aufgrund von Unwissen in Zoos und Zirkussen entstanden sein. Die gezielte Züchtung der Tiere ist sehr umstritten.

Vom Aussehen und Verhalten her weisen Liger sowohl Löwen- als auch Tigermerkmale auf. Die Tabelle zeigt ausgewählte Merkmale eines typischen Tigers und Löwen sowie zweier bestimmter Liger:

	Tiger	Löwe	Liger 1	Liger 2
Körperlänge [m]	2,4	1,75	2,6	2,8
Gewicht [100 kg]	2	1,3	2,3	2,5
Geschwindigkeit [m/s]	16	22	20	17
tägl. Nahrungsaufnahme [kg]	7	6	7,2	6,7

Wir wollen die Eigenschaften von mehreren Ligern erfassen. Dabei wollen wir die Daten möglichst komprimiert speichern und gleichzeitig schnell erkennen können, ob ein bestimmtes Tier eher die Eigenschaften eines Löwen oder eines Tigers hat. Dafür betrachten wir den Vektorraum U mit den Basisvektoren

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 2 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{l} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 1,3 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix},$$

wobei \vec{t} die Eigenschaften des Tigers darstellt und \vec{l} die des Löwen.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Wendet das Gram-Schmidt Verfahren mit $\vec{o}_1 = \vec{t}$ an, um eine passende Orthogonalbasis (\vec{o}_1, \vec{o}_2) zu bestimmen. Rundet dabei auf drei Stellen hinter dem Komma.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Es sei \vec{v}_{1U} die Approximation von Liger 1 auf U und \vec{v}_{2U} die von Liger 2. Berechne die Koeffizienten dieser beiden Vektoren bezüglich der Orthogonalbasis aus Aufgabe 1. Rundet dabei auf drei Stellen hinter dem Komma.

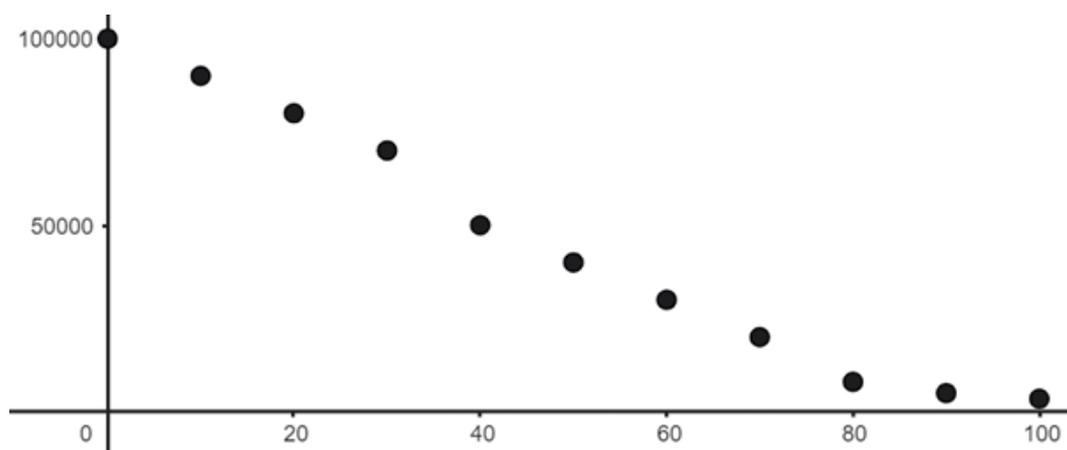
Aufgabe 3 (30 Punkte)

Wir wollen nun schauen, wie viel vom Tiger und vom Löwen jeweils in den Ligern steckt. Stellt dazu die Approximation aus Aufgabe 2 wieder als Linearkombination der ursprünglichen Tiger- und Löwenvektoren dar. Rundet dabei auf drei Stellen hinter dem Komma.

2 Entwicklung des Tigerbestandes [70 Punkte]

Jahre nach Beobachtungsbeginn	Anzahl der lebenden Tiger (Schätzung)
0	100000
10	90000
20	80000
30	70000
40	50000
50	40000
60	30000
70	20000
80	8000
90	5000
100	3500

Tigerpopulation 1900-2000 ¹



Wir wollen für die gegebenen Punkte die Ausgleichsgerade berechnen.

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Eine kanonische Basis für einen geeigneten 2-dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^{11} , um die beste lineare Approximation zu finden, ist

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix} .$$

Orthogonalisiert diese Basis mit dem Gram-Schmidt-Verfahren mit $\vec{o}_0 = \vec{x}_0$.

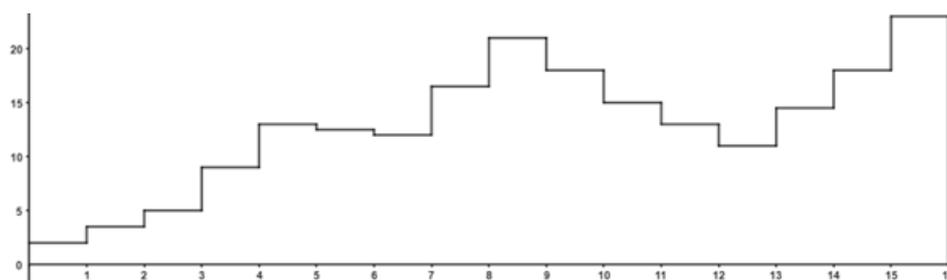
Aufgabe 5 (40 Punkte)

Bestimmt die Funktionsgleichung der Ausgleichsgerade und rundet die beiden Parameter auf zwei Stellen hinter dem Komma.

¹World O' Stats: Tiger Population by Country. Verfügbar unter: <https://worldostats.com/animals-wildlife/tiger-population-by-country/> [Zugriff am: 29. August 2025].

3 Aktivität des Tigers [100 Punkte]

Tiger sind hauptsächlich nacht- und dämmerungsaktiv. In Gefangenschaft kann eine Beobachtung des Verhaltens der Tiere Auskunft über ihr Wohlbefinden geben. Sind Tiger tagsüber sehr aktiv und rastlos, kann dies ein Indiz dafür sein, dass die Lebensumstände zu sehr von denen in freier Wildbahn abweichen und sich die Haltung negativ auf das Verhalten der Tiger auswirkt. Die hier gezeigte Treppenfunktion zeigt die Aktivität von Tigern, die im Nandankanan Zoological Park in Indien leben im Zeitraum von 7:00 Uhr bis 15:00 Uhr. Auf der y -Achse steht der Prozentsatz der Zeit, die die Tiger im jeweiligen Zeitraum aktiv sind. $x = 0$ entspricht dabei 7:00 Uhr, $x = 1$ entspricht 7:30 Uhr usw.



Aktivitätsmuster von Tigern ²

07:00-07:30	07:30-08:00	08:00-08:30	08:30-09:00	09:00-09:30	09:30-10:00	10:00-10:30	10:30-11:00
2	3,5	5	9	13	12,5	12	16,5
11:00-11:30	11:30-12:00	12:00-12:30	12:30-13:00	13:00-13:30	13:30-14:00	14:00-14:30	14:30-15:00
21	18	15	13	11	14,5	18	23

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gib die ersten 8 Vektoren der Haar-Basis des \mathbb{R}^{16} in der im Skript festgelegten Reihenfolge an.

Aufgabe 7 (60 Punkte)

Projiziere die Daten der obigen Tabelle, also den Vektor $(2|3,5|5|9|13|12,5|12|16,5|21|18|15|13|11|14,5|18|23)$ einmal auf die ersten vier Vektoren der Haar-Basis (diesen Vektor nennen wir \vec{A}_1) und einmal auf die ersten acht Vektoren (diesen Vektor nennen wir \vec{A}_2).

Trage die Koeffizienten bezüglich der Haar-Basis ein und zeichne die entsprechenden Treppenfunktionen. Runde auf zwei Stellen hinter dem Komma.

Aufgabe 8 (30 Punkte)

Berechne für die beiden Approximationen aus Aufgabe 7 den relativen Fehler, der durch die Approximation entstanden ist. Runde auf zwei Stellen hinter dem Komma. Hierbei ist δ_i der relative Fehler von \vec{A}_i .

²Mohapatra, R. K. (2014). Study on activity pattern and incidence of stereotypic behavior in captive tigers. *Journal of Veterinary Behavior*, 9(4), 172–176. <https://doi.org/10.1016/j.jveb.2014.04.003>

4 Tigerbild [140 Punkte]

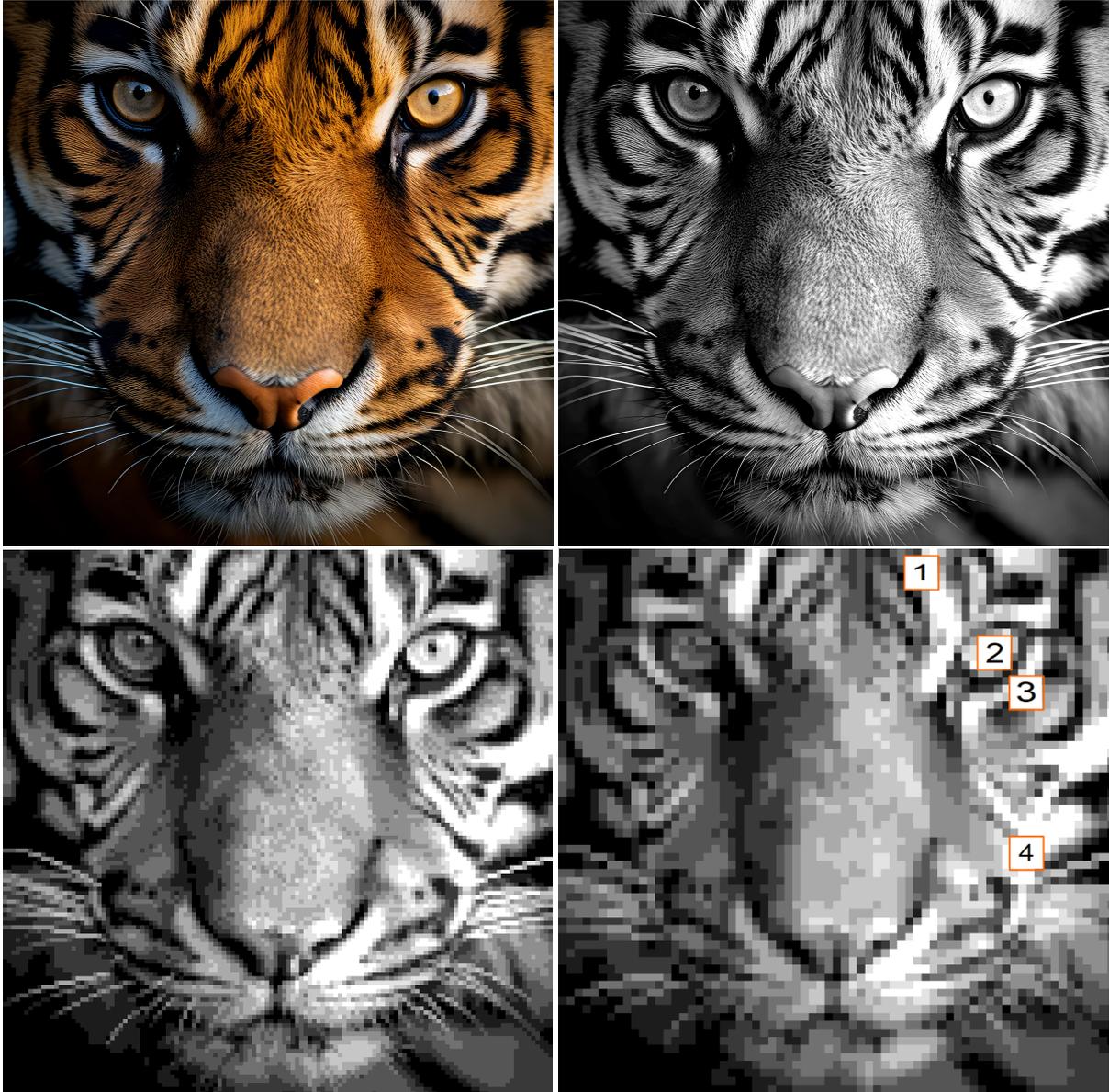


Bild: Vecteezy.com

Das farbige Tigerbild wurde zunächst in Graustufen dargestellt und anschließend zweimal komprimiert. Beim zweiten Mal ist allerdings ein technisches Problem aufgetreten: An vier Stellen sind einige Pixel verloren gegangen. Zum Glück haben wir noch Zugriff auf die Werte der vorherigen Komprimierung. Unser Ziel ist es nun, die fehlenden Daten wieder herzustellen.

Folgende Tabellen enthalten die Daten aus dem vorherigen Approximationsschritt.

Bild 1

4	6	3	0
3	8	3	0
5	9	3	0
9	8,5	5	0

Bild 2

3	6	1,5	2
0	10	1	0
0	4	0	1,5
0	0	0,5	7

Bild 3

4	0	4	10
0	5	9	6
4,5	10	9	6
7	6	7	4

Bild 4

10	6	3	2
3	9	10	6
0	4	6	7
0	0	6	10

Aufgabe 9 (120 Punkte)

Wendet den Haar-Algorithmus mit Schwellenwert $\epsilon = 2$ auf die gegebenen Werte der fehlenden 4x4-Ausschnitte an. Rechnet mit den exakten Werten; diese enthalten maximal drei Stellen hinter dem Komma. Tragt die Daten aller vier Bildausschnitte in das Lösungsblatt ein, die jeweils nach dem allerersten Schritt des Haar-Algorithmus entstehen (also euer erstes Zwischenergebnis, im Skript: Transformation 1), sowie die der fertigen Approximation (euer Endergebnis).

Aufgabe 10 (20 Punkte)

Vervollständigt das Bild mithilfe eurer Ergebnisse aus Aufgabe 9. Wir wollen vier verschiedene Farben darstellen, schwarz, dunkelgrau, hellgrau und weiß. Verwendet hierzu die bereitgestellten Filzstifte.

schwarz: $x \geq 8$ dunkelgrau: $8 > x \geq 5$ hellgrau: $5 > x \geq 2$ weiß: $2 > x$



5 Rätsel [120 Punkte]

Gegeben ist ein Bild mit 8x8 Pixeln. Der erste Teil des Haar-Algorithmus wurde bereits durchgeführt und die gegebenen Zahlen stellen den Schritt nach dem Tresholding dar. Dieses wurde schon durchgeführt. Es fehlt also nur noch die Rücktransformation.

Aufgabe 11 (90 Punkte)

Führt den Algorithmus zu Ende durch. Dafür müsst ihr noch 3 Schritte berechnen. Rundet auf zwei Stellen hinter dem Komma. Tragt auf dem Lösungsblatt jeweils die Daten des oberen linken Viertels ein.

Aufgabe 12 (30 Punkte)

Im vierten Schritt sollen alle Pixel angemalt werden, die einen Wert ≥ 6 haben. Wie lautet das Ergebnis der Rechnung?

28,03	5,5	0	0	0	-4,25	3,95	0
-6,3	7,93	2,15	0	4,85	-1,85	3,6	0
1,18	11,2	0	0	0	3	7,85	0
-3,85	1,23	-1,85	0	0	0	7,25	1
6	4,25	-2,75	1,75	0	-2,5	3,05	0
-1,35	6,15	-2,4	0	0	1,15	3,4	2
0	4,5	0	-4,35	0	4,5	0	0
0	-2	0	-6	0	0	0	0

Rücktransformation 1

Rücktransformation 2

Rücktransformation 3

Schritt 4: anmalen
