	 35. Mathematik-Turnier Staffel
---	---

Aufgabe 1 (20 Punkte, 2 Versuche)

Ein Raum hat eine Grundfläche von 140m^2 , die vollständig von drei Teppichen bedeckt ist. Die Gesamtfläche der Teppiche beträgt 200m^2 . Es ist bekannt, dass 24m^2 der Bodenfläche genau zweimal bedeckt sind (durch zwei übereinander liegende Teppiche, die jedoch nicht überall dasselbe Paar bilden müssen).

Wie viele Quadratmeter der Bodenfläche werden dreifach von Teppichen überdeckt?

Ausarbeitung Aufgabe 1

Es sei A_2 die Fläche, die genau zweimal bedeckt ist, und A_3 die Fläche, die genau dreimal bedeckt ist. Wenn wir die Flächen der drei Teppiche addieren, wird jeder Teil des Bodens entsprechend der Anzahl der Teppiche gezählt, die ihn bedecken: Einmal bedeckte Bereiche werden einmal gezählt, zweimal bedeckte Bereiche zweimal und dreimal bedeckte Bereiche dreimal. Im Vergleich zur tatsächlichen Bodenfläche enthält die Gesamtfläche der Teppiche somit eine zusätzliche Zählung von A_2 und zwei zusätzliche Zählungen von A_3 . Daher gilt:

$$200 = 140 + A_2 + 2A_3.$$

Setzt man $A_2 = 24$ ein, so erhält man

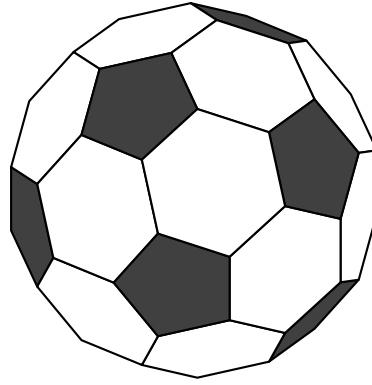
$$200 = 140 + 24 + 2A_3,$$

also

$$A_3 = 18.$$

Aufgabe 2 (20 Punkte, 2 Versuche)

Ein Fußball besteht aus 32 Flächen: 12 schwarzen Fünfecken und 20 weißen Sechsecken. Immer wenn zwei Flächen aufeinandertreffen, teilen sie sich eine Kante, die als Naht bezeichnet wird.



Wie viele Nähte hat der Fußball?

Ausarbeitung Aufgabe 2

Jedes Sechseck hat 6 Kanten, und jedes Fünfeck hat 5 Kanten. Zählt man die Kanten aller Flächen zusammen, so ergibt sich

$$20 \cdot 6 + 12 \cdot 5 = 120 + 60 = 180.$$

Da sich jedoch jede Naht aus zwei solcher Kanten ergibt, beträgt die Gesamtzahl der Nähte 90.

Aufgabe 3 (20 Punkte, 2 Versuche)

Es seien x und y reelle Zahlen, für die gilt: $x + y = 5$ und $x^3 + y^3 = 50$.

Was ist der Wert von xy ?

Ausarbeitung Aufgabe 3

In der Identität

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

ersetzen wir die gegebenen Werte und erhalten:

$$5^3 = 50 + 3xy \cdot 5.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$125 = 50 + 15xy.$$

Daher ist

$$15xy = 75,$$

was zu $xy = 5$ führt.

Aufgabe 4 (20 Punkte, 2 Versuche)

Zwei Radfahrerinnen befinden sich in einem Abstand von 32 Kilometern voneinander und fahren gleichzeitig direkt aufeinander zu. Im selben Augenblick fliegt eine Fliege, die zuvor auf dem Lenker eines der Fahrräder saß, auf die andere Radfahrerin zu. Jedes Mal, wenn die Fliege einen der Lenker erreicht, kehrt sie sofort um und fliegt zur anderen Radfahrerin. Sie fliegt auf diese Weise hin und her, bis sich die Radfahrerinnen begegnen. Beide Radfahrerinnen fahren mit einer konstanten Geschwindigkeit von 16 km/h, während die Fliege mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24 km/h fliegt.

Wie viele Kilometer Gesamtstrecke hat die Fliege zurückgelegt?

Ausarbeitung Aufgabe 4

Da jede Radfahrerin mit einer Geschwindigkeit von 16 km/h auf die andere zufährt, beträgt ihre relative Geschwindigkeit

$$16 + 16 = 32 \text{ km/h.}$$

Da der anfängliche Abstand zwischen ihnen 32 Kilometer beträgt, treffen sie sich nach 1 Stunde. Während dieser gesamten Zeit fliegt die Fliege ununterbrochen mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24 km/h. Daher beträgt die Gesamtstrecke, die sie zurücklegt, 24 Kilometer.

Aufgabe 5 (30 Punkte, 3 Versuche)

Ein 4×4 -Gitter soll mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 so ausgefüllt werden, dass jede Zahl genau einmal in jeder Zeile, jeder Spalte und auf jeder der beiden Diagonalen vorkommt.

Wie viele verschiedene solche ausgefüllten 4×4 -Gitter gibt es?

Ausarbeitung Aufgabe 5

Zunächst ist zu beachten, dass bei einem gegebenen gültigen Gitter die Anwendung einer beliebigen Permutation der Symbole $\{1, 2, 3, 4\}$ auf alle Einträge ein weiteres gültiges Gitter ergibt. Daher genügt es, die Anzahl der Lösungen zu zählen, bei denen die erste Zeile feststeht, und zwar als $(1, 2, 3, 4)$, und dieses Ergebnis dann mit $4! = 24$ zu multiplizieren.

Wir bestimmen nun alle derartigen Gitter unter dieser Annahme. Dazu betrachten wir systematisch die Möglichkeiten für die verbleibenden Zeilen und stellen dabei sicher, dass:

- jede Zeile eine Permutation von $\{1, 2, 3, 4\}$ ist,
- jede Spalte alle Zahlen genau einmal enthält,
- beide Diagonalen auch alle Zahlen genau einmal enthalten.

Auf diese Weise findet man genau zwei gültige Vervollständigungen:

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

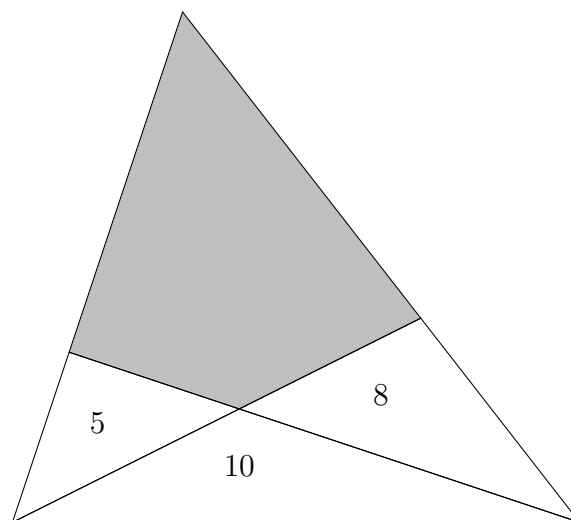
1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Nach der Vorbemerkung beträgt somit die Gesamtzahl solcher Gitter

$$2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48.$$

Aufgabe 6 (20 Punkte, 3 Versuche)

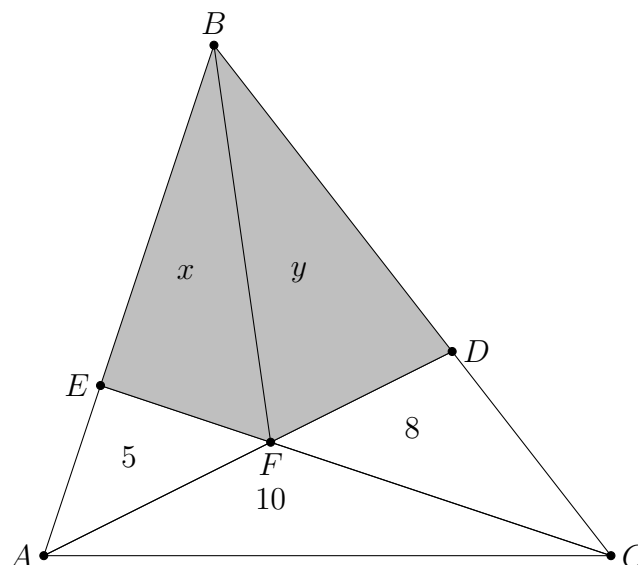
Ein Dreieck ist in vier Bereiche unterteilt. Drei dieser Bereiche sind Dreiecke und haben die Flächen 5, 8 und 10 (siehe Skizze).



Wie groß ist die Fläche des schraffierten Vierecks?

Ausarbeitung Aufgabe 6

Wir beschriften das Dreieck wie in der Abbildung gezeigt und bezeichnen die beiden unbekannten Dreiecksbereiche innerhalb des Vierecks wie angegeben mit den Flächen x und y .



Wir betrachten zunächst die Dreiecke AFC und FDC . Wenn wir AF bzw. FD als Grundseiten betrachten, haben beide Dreiecke die gleiche Höhe h (der Abstand von C auf die Gerade, die A , D und F enthält). Es gilt dann

$$10 = \frac{1}{2}|AF|h \quad \text{und} \quad 8 = \frac{1}{2}|FD|h.$$

Wenn wir die erste Gleichheit durch die zweite Teilen, erhalten wir

$$\frac{10}{8} = \frac{|AF|}{|FD|}.$$

Also das Verhältnis ihrer Flächen entspricht dem Verhältnis der entsprechenden Grundseiten. Die analoge Überlegung mit den Dreiecken AFB und FDB gibt

$$\frac{x+5}{y} = \frac{|AF|}{|FD|}.$$

Daher gilt:

$$\frac{5+x}{y} = \frac{10}{8}.$$

Mit den Dreiecken EFA und FCA bzw. EFB und FCB erhalten wir analog

$$\frac{5}{10} = \frac{|EF|}{|FC|} = \frac{x}{y+8}.$$

Wir lösen nun das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \frac{5+x}{y} = \frac{10}{8}, \\ \frac{x}{y+8} = \frac{5}{10} \end{cases}$$

und erhalten $y = 12$ und $x = 10$. Schließlich beträgt die Fläche des schraffierten Vierecks

$$x + y = 10 + 12 = 22.$$

Aufgabe 7 (30 Punkte, 2 Versuche)

Wie lautet die letzte Ziffer der folgenden Zahl?

$$2026^0 + 2026^1 + 2026^2 + 2026^3 + \dots + 2026^{2025} + 2026^{2026}$$

Ausarbeitung Aufgabe 7

Wir arbeiten modulo 10, da nur die letzte Ziffer benötigt wird. Aus

$$2026 \equiv 6 \pmod{10}$$

folgt, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$:

$$2026^n \equiv 6^n \equiv 6 \pmod{10}$$

gilt, denn alle positiven Potenzen von 6 enden auf die Ziffer 6. Das Ausdruck mit Exponent 0 ist $2026^0 = 1$. Die Summe setzt sich daher wie folgt zusammen:

- einem Term, der gleich 1 ist,
- 2026 Termen, die alle auf die Ziffer 6 enden.

Daher ist

$$2026^0 + 2026^1 + \dots + 2026^{2026} \equiv 1 + 2026 \cdot 6 \equiv 1 + 6 \equiv 7 \pmod{10}.$$

Die letzte Ziffer der angegebenen Zahl ist 7.

Aufgabe 8 (20 Punkte, 2 Versuche)

Betrachte die folgenden beiden Listen von Aussagen.

Liste 1

1. Genau 1 Behauptung in dieser Liste ist falsch.
2. Genau 2 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
3. Genau 3 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
4. Genau 4 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
5. Genau 5 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
6. Genau 6 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
7. Genau 7 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
8. Genau 8 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
9. Genau 9 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
10. Genau 10 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.

Liste 2

1. Mindestens 1 Behauptung in dieser Liste ist falsch.
2. Mindestens 2 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
3. Mindestens 3 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
4. Mindestens 4 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
5. Mindestens 5 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
6. Mindestens 6 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
7. Mindestens 7 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
8. Mindestens 8 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
9. Mindestens 9 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.
10. Mindestens 10 Behauptungen in dieser Liste sind falsch.

Es seien n_1 und n_2 die Anzahl der *wahren* Aussagen in Liste 1 bzw. Liste 2.

Was ist $n_1 + n_2$?

Ausarbeitung Aufgabe 8

Die Aussagen in Liste 1 widersprechen sich paarweise, was bedeutet, dass höchstens eine davon wahr sein kann. Wären alle Aussagen falsch, wäre Aussage 10 wahr, was ein Widerspruch ist. Daher ist genau eine Aussage wahr und $n_1 = 1$. Offensichtlich ist die wahre Aussage Aussage 9.

Wäre Aussage 10 in Liste 2 wahr, wären alle Aussagen – einschließlich Aussage 10 – falsch. Dies ist ein Widerspruch, daher ist Aussage 10 falsch. Daraus folgt, dass Aussage 1 wahr ist. Wäre Aussage 9 wahr, wären die Aussagen 2 bis 10 falsch (da wir bereits wissen, dass Aussage 1 wahr ist). Dies ist wiederum ein Widerspruch, daher ist Aussage 9 falsch. Da die Aussagen 9 und 10 beide falsch sind, ist Aussage 2 wahr. Auf ähnliche Weise fortfahrend können wir nacheinander beweisen, dass Aussage 8 falsch, Aussage 3 wahr, Aussage 7 falsch, Aussage 4 wahr, Aussage 6 falsch und Aussage 5 wahr ist. Somit besteht die einzige Möglichkeit darin, dass die Aussagen 1–5 wahr sind, während die Aussagen 6–10 falsch sind. Es lässt sich leicht überprüfen, dass diese Möglichkeit tatsächlich logisch konsistent ist, und daher gilt $n_2 = 5$.

Also ist $n_1 + n_2 = 6$.

Aufgabe 9 (30 Punkte, 2 Versuche)

Alice multipliziert zwei positive ganze Zahlen, deren Differenz 11 beträgt, und Bob multipliziert zwei positive ganze Zahlen, deren Differenz 8 beträgt. Sie erhalten das gleiche Produkt.

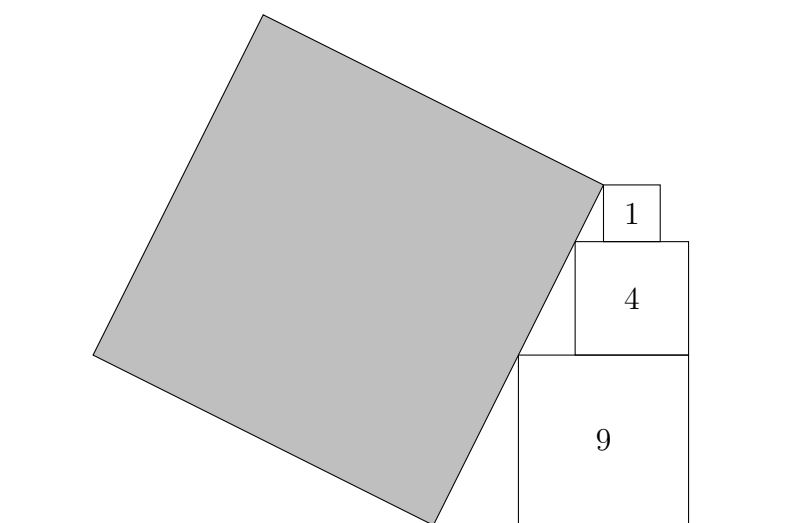
Was ist der Wert dieses Produktes?

Ausarbeitung Aufgabe 9

Wir schreiben Alices Produkt als $x(x+11)$ und Bobs Produkt als $y(y+8)$ auf. Um dasselbe Produkt zu erhalten, muss gelten: $x < y < y + 8 < x + 11$. Daher hat Bobs Produkt eine der Formen $(x+1)(x+9)$ oder $(x+2)(x+10)$. Setzt man dies gleich $x(x+11)$, so ergibt sich im ersten Fall $x = 9$ und im zweiten Fall $x = -20$, was als negative Lösung ausscheidet. Die einzige Lösung ist also $9 \cdot 20 = 180 = 10 \cdot 18$.

Aufgabe 10 (20 Punkte, 3 Versuche)

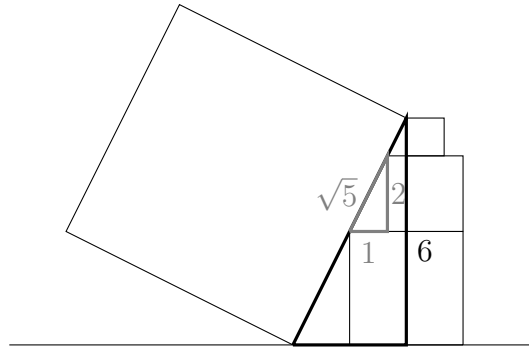
Drei Quadrate mit den Flächen 9, 4 und 1 werden so übereinander gelegt, dass die ersten beiden Quadrate einen gemeinsamen Eckpunkt haben. Ein großes Quadrat wird so platziert, dass es diese drei Quadrate tangentiell berührt und mit dem kleinsten Quadrat einen gemeinsamen Eckpunkt hat, siehe Skizze.



Wie groß ist die Fläche des großen Quadrats?

Ausarbeitung Aufgabe 10

Wir betrachten die beiden in der Abbildung dargestellten ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke.



Das kleine Dreieck hat eine horizontale Seite von 1, eine vertikale Seite von 2 und somit eine Hypotenuse von $\sqrt{5}$. Da das größere Dreieck eine vertikale Seite von 6 hat, beträgt der Ähnlichkeitsfaktor 3. Daher beträgt die Hypotenuse des größeren Dreiecks $3\sqrt{5}$ und die Fläche des großen Quadrats $(3\sqrt{5})^2 = 45$.

Aufgabe 11 (30 Punkte, 3 Versuche)

Was ist die größte Zahl, die durch jede ihrer Ziffern teilbar ist, wobei jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?

Ausarbeitung Aufgabe 11

Zunächst ist zu beachten: Wenn die Ziffer 5 in der Zahl vorkommt, so muss die Zahl auf 5 oder 0 enden, um durch 5 teilbar zu sein. Da 0 nicht vorkommen kann (keine Zahl ist durch 0 teilbar, soll die Zahl auf 5 enden. Eine solche Zahl kann jedoch nicht gleichzeitig durch 2, 4, 6 oder 8 teilbar sein, da diese eine gerade Endziffer erfordern. Daher kann mit der Ziffer 5 eine Zahl mit höchstens 5 Ziffern (die fünf ungeraden Ziffern) erhalten werden. Da wir die größte Zahl suchen, ist es naheliegend, erstmal mit mindestens 6 Ziffern zu versuchen. Bei so einer Zahl kann daher die 5 nicht vorkommen.

Betrachten wir als Nächstes die Teilbarkeit durch 9. Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern ein Vielfaches von 9 ist. Die Summe der Ziffern

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$$

ist nicht durch 9 teilbar. Wenn 9 enthalten ist, müssen wir eine weitere Ziffer weglassen, damit die Gesamtsumme ein Vielfaches von 9 wird. Entfernt man 4, ergibt sich

$$1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 = 36,$$

was durch 9 (und somit auch durch 3) teilbar ist. Somit sind die in Frage kommenden Ziffern

$$1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.$$

Wir wollen nun aus diesen Ziffern die größtmögliche Zahl bilden, die durch alle diese Ziffern teilbar ist. Da die Teilbarkeit durch 8 von den letzten drei Ziffern abhängt, suchen wir nach der kleinsten dreistelligen Zahl (unter Verwendung unterschiedlicher Ziffern aus der obigen Menge), die durch 8 teilbar ist (und somit auch durch 2). Man stellt fest, dass 312 diese Zahl ist. Daher müssen die verbleibenden Ziffern $\{9, 8, 7, 6\}$ in möglichst

absteigender Reihenfolge an den Anfang gesetzt werden, um die Zahl zu maximieren. Die größtmögliche Zahl wäre 9876312. Wir prüfen nun die Teilbarkeit durch 7:

$$9876312 = 9\,800\,000 + 70\,000 + 6\,300 + 12$$

ist nicht durch 7 teilbar. Der zweitbeste Kandidat ist 9867312:

$$9867312 = 9\,800\,000 + 63\,000 + 4\,200 + 70 + 42,$$

und dieser ist durch 7 teilbar. Somit ist die größte Zahl, die alle vorgegebenen Bedingungen erfüllt, 9867312.

Aufgabe 12 (30 Punkte, 3 Versuche)

Vor dir auf dem Tisch liegen 10 Karten, die ordentlich nebeneinander angeordnet sind. Jede Karte hat auf der einen Seite ein X und auf der anderen Seite ein 0. Im Moment liegen alle Karten mit der 0-Seite nach oben:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Du gehst nun wie folgt vor: Beginne rechts und arbeite dich nach links vor, wobei du die Karten nacheinander umdrehst. Du hörst auf, sobald du eine Karte von der 0-Seite auf die X-Seite umgedreht hast oder wenn alle 10 Karten umgedreht sind. Dieser Vorgang wird als ein Schritt bezeichnet.

Nach einem Schritt liegen alle Karten mit der 0-Seite nach oben, mit Ausnahme der Karte ganz rechts:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 X

Nach zwei Schritten zeigen alle Karten mit der Seite 0 nach oben, mit Ausnahme der zweiten Karte von rechts:

0 0 0 0 0 0 0 0 X 0

Nach drei Schritten zeigen acht Karten mit der Seite 0 nach oben, und die beiden Karten ganz rechts zeigen mit der Seite X nach oben:

0 0 0 0 0 0 0 0 X X

Nach wie vielen Schritten erhält man zum ersten Mal die folgende Konfiguration?

0 X 0 0 0 0 X 0 X 0

Ausarbeitung Aufgabe 12

Jede Karte kann einen von zwei Zuständen annehmen: 0 oder X. In jedem Schritt werden die Karten von rechts nach links abgesucht und umgedreht, bis eine Karte von der 0-Seite auf die X-Seite umgedreht wurde. An diesem Punkt wird der Schritt beendet. Dieser Vorgang entspricht der Addition von 1 in binärer Schreibweise, wobei gilt:

$$0 \leftrightarrow 0, \quad X \leftrightarrow 1,$$

und die Karte ganz rechts entspricht dem niedrigstwertigen Stellenwert (Bit). Folglich stellt die Anordnung der Karten nach n Schritten die Binärentwicklung der Zahl n dar, die von links (höchstwertiges Bit) nach rechts (niedrigstwertiges Bit) gelesen wird. Die gewünschte Anordnung entspricht der Binärzahl

$$0100001010_2.$$

Die Umrechnung in Dezimalzahlen ergibt:

$$0100001010_2 = 2^8 + 2^3 + 2^1 = 256 + 8 + 2 = 266.$$

Aufgabe 13 (20 Punkte, 2 Versuche)

Eine Zahlenfolge ist wie folgt definiert: Der erste Term ist a_1 , der zweite Term ist a_2 , und jeder weitere Term ist die Summe der beiden vorhergehenden Terme. Somit gilt:

$$a_3 = a_1 + a_2, \quad a_4 = a_3 + a_2 = a_1 + 2a_2.$$

Im Allgemeinen lässt sich jeder Term in der Form

$$a_n = x_n a_1 + y_n a_2$$

für ganze Zahlen x_n und y_n schreiben.

Wie groß ist der Wert des Koeffizienten y_{10} ?

Ausarbeitung Aufgabe 13

Setzt man die allgemeine Form in die Rekursionsbeziehung $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ein, so erhält man:

$$x_n a_1 + y_n a_2 = (x_{n-1} a_1 + y_{n-1} a_2) + (x_{n-2} a_1 + y_{n-2} a_2).$$

Durch den Vergleich der Koeffizienten von a_1 und a_2 stellen wir fest, dass beide Folgen (x_n) und (y_n) derselben Rekursionsbeziehung genügen:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad y_n = y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Als Nächstes bestimmen wir die Anfangswerte für (y_n) . Aus

$$a_1 = x_1 a_1 + y_1 a_2, \quad a_2 = x_2 a_1 + y_2 a_2$$

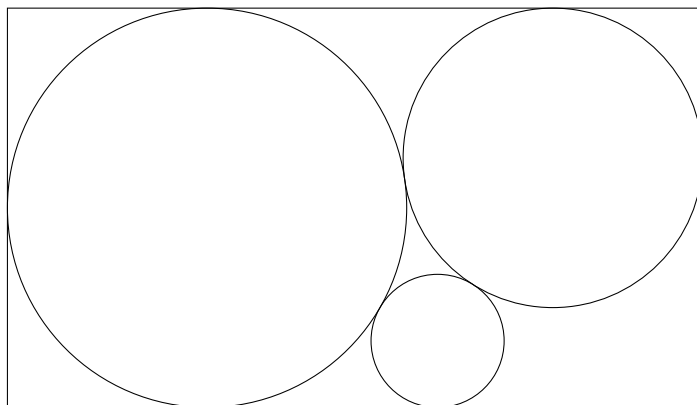
erhalten wir

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1.$$

Somit ist (y_n) eine verschobene Fibonacci-Folge: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...
Für $n = 10$ ergibt sich $y_{10} = 34$.

Aufgabe 14 (30 Punkte, 2 Versuche)

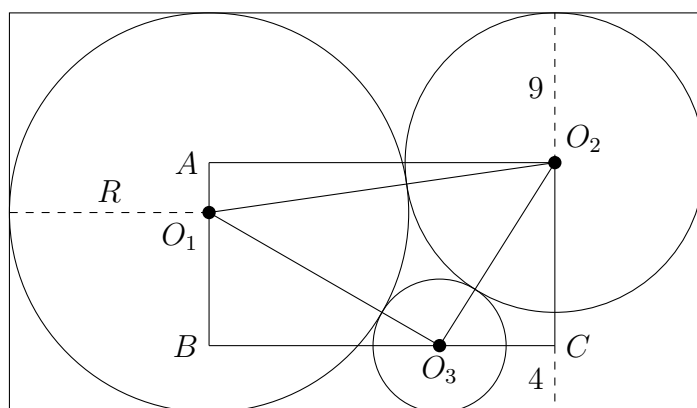
In einer rechteckigen Schachtel befinden sich drei kreisförmige Torten, die sich gegenseitig berühren und zudem die Seiten der Schachtel berühren, wie in der Abbildung unten dargestellt. Der Radius der kleinsten Torte beträgt 4, und der Radius der mittelgroßen Torte beträgt 9.



Wie groß ist der Radius der größten Torte?

Ausarbeitung Aufgabe 14

Es seien O_1 , O_2 und O_3 die Mittelpunkte des großen, mittleren und kleinen Kreises mit den entsprechenden Radien R , 9 und 4. Die Höhe des Rechtecks entspricht dem Durchmesser des größten Kreises, also $2R$. Wir betrachten auch die Punkte A , B , C , so dass die Dreiecke O_1AO_2 , O_1BO_3 und O_2CO_3 rechtwinklig sind (siehe Skizze).



Unter Anwendung des Satzes des Pythagoras auf O_1AO_2 , erhalten wir

$$|AO_2| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |AO_1|^2} = \sqrt{(R+9)^2 - (R-9)^2} = 6\sqrt{R}.$$

Analog erhalten wir aus O_1BO_3

$$|BO_3| = \sqrt{|O_1O_3|^2 - |BO_1|^2} = \sqrt{(R+4)^2 - (R-4)^2} = 4\sqrt{R}.$$

Daher beträgt der horizontale Abstand zwischen O_2 und O_3

$$|CO_3| = 6\sqrt{R} - 4\sqrt{R} = 2\sqrt{R}.$$

Als Nächstes betrachten wir das Dreieck O_2CO_3 . Die Seitenlängen sind

$$|CO_3| = 2\sqrt{R}, \quad |CO_2| = 2R - 9 - 4 = 2R - 13 \quad \text{und} \quad |O_2O_3| = 9 + 4 = 13.$$

Der Satz des Pythagoras gibt dann die Bedingung

$$(2\sqrt{R})^2 + (2R - 13)^2 = 13^2.$$

Nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen erhalten wir

$$4R + 4R^2 - 52R + 169 = 169,$$

was zu

$$4R^2 - 48R = 0$$

führt. Nach Faktorisieren erhalten wir:

$$4R(R - 12) = 0.$$

Da $R > 0$ ist, schließen wir daraus, dass $R = 12$ gilt.

Aufgabe 15 (30 Punkte, 3 Versuche)

An einer Konferenz nehmen dreißig Wissenschaftler*innen teil. Jede*r von ihnen ist entweder Mathematiker*in, Physiker*in, Chemiker*in oder Biolog*in. Die Gesamtzahl der Physiker*innen und Biolog*innen beträgt die Hälfte der Zahl der Mathematiker*innen, und die Gesamtzahl der Physiker*innen und Chemiker*innen beträgt das Doppelte der Zahl der Biolog*innen. Es gibt mindestens eine*n Physiker*in.

*Wie viele Mathematiker*innen sind auf der Konferenz?*

Ausarbeitung Aufgabe 15

Es seien m , p , c und b die Anzahl der Mathematiker*innen, Physiker*innen, Chemiker*innen bzw. Biolog*innen. Die Bedingungen der Aussagen lauten

$$m + p + c + b = 30, \quad p + b = \frac{1}{2}m, \quad p + c = 2b \quad \text{und} \quad p \geq 1.$$

Wir setzen $c = 2b - p$ und $m = 2p + 2b$ in die erste Gleichung ein und erhalten so $2p + 5b = 30$. Da $p \geq 1$ gilt und $5b = 30 - 2p$ gerade ist, sind die einzigen Möglichkeiten $b = 0, 2, 4$, wofür jeweils $p = 15, 10, 5$ gilt. Die ersten beiden Möglichkeiten ergeben ein negatives c , daher muss $b = 4$ und $p = 5$ sein, was $m = 2p + 2b = 18$ ergibt.

Aufgabe 16 (20 Punkte, 2 Versuche)

Eine Gerade teilt einen Kreis in zwei Regionen. Eine zweite Gerade, die die erste schneidet, ergibt vier Regionen, und eine dritte Gerade kann bis zu sieben Regionen im Kreis erzeugen.

Wie viele Regionen lassen sich maximal durch sechs Geraden erzeugen?

Ausarbeitung Aufgabe 16

Anstatt dieses Problem durch Ausprobieren zu lösen, ist es effektiver, eine allgemeine Regel für die maximale Anzahl an Regionen zu ermitteln, die bei einer gegebenen Anzahl von Geraden erzielt werden kann.

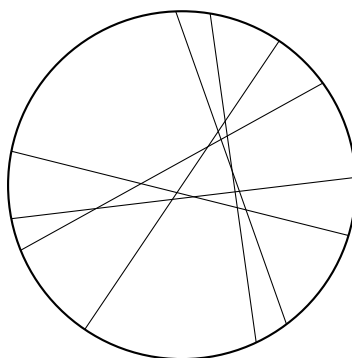
Zunächst besteht der Kreis aus einer einzigen Region. Mit jeder neuen Gerade erhöht sich die Anzahl der Regionen wie folgt:

- Bei der ersten Gerade entstehen 2 Regionen, wobei 1 neue Region hinzukommt.
- Die zweite Gerade (die die erste Gerade schneidet) ergibt 4 Regionen, wobei 2 neue Regionen hinzukommen.
- Mit einer dritten Gerade, die die anderen beiden Geraden in verschiedenen Punkten schneidet, können bis zu 7 Regionen vorkommen, wodurch 3 neue Regionen hinzukommen.

Dies lässt vermuten, dass jede neue Gerade höchstens eine Anzahl von Regionen hinzufügt, die der Nummer dieser Gerade entspricht. Und tatsächlich ist dies der Fall. Um zu verstehen, warum das so ist, betrachten wir die n -te Gerade. Wenn sie so gezeichnet wird, dass sie alle vorherigen Geraden schneidet und sich keine drei Geraden im gleichen Punkt treffen, dann teilen die vorherigen $n - 1$ Geraden die neue Gerade in n Segmente auf. Jedes dieser Segmente teilt eine zuvor vorhandene Region in zwei Regionen und trägt somit eine zusätzliche Region bei. Daher fügt die n -te Gerade n neue Regionen hinzu. Anhand dieser Beobachtung können wir die Gesamtzahl der Stücke durch sukzessive Addition berechnen.

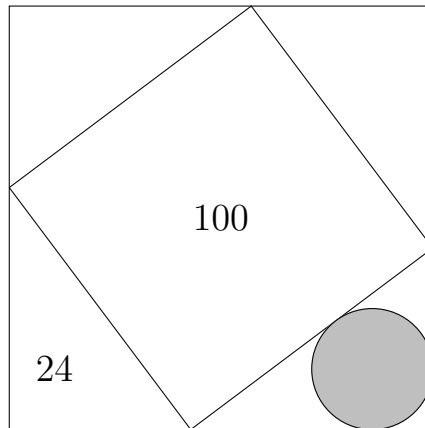
Anzahl der Schnitte	Maximale Anzahl der Stücke
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22

Die maximale Anzahl an Regionen, die mit sechs Geraden erzeugt werden kann, beträgt also 22.



Aufgabe 17 (30 Punkte, 2 Versuche)

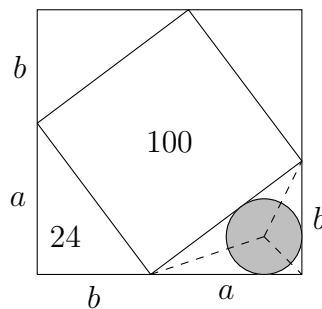
Die Ecken eines Quadrats mit der Fläche 100 liegen auf den Seiten eines größeren Quadrats, so dass die vier entstandenen Dreiecke alle die Fläche 24 haben.



Wie groß ist die Fläche des größten Kreises, der in eines dieser Dreiecke passt?

Ausarbeitung Aufgabe 17

Die Fläche des großen Quadrats beträgt $100 + 4 \cdot 24 = 196$, daher hat die Seite des Quadrats die Länge 14. Sei r der Radius des Kreises und seien a und b so gewählt, dass $a + b = 14$ gilt. Außerdem teilen wir das Dreieck in drei kleinere Teildreiecke auf.



Die Fläche des gesamten Dreiecks beträgt $\frac{ab}{2}$, und somit gilt:

$$\begin{cases} a + b = 14, \\ ab = 48. \end{cases}$$

Wir erhalten $a = 8$ und $b = 6$. Die drei Teildreiecke haben die Flächen $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$ und $\frac{10r}{2}$, und somit

$$4r + 3r + 5r = 24.$$

Wir erhalten $r = 2$, und somit hat der Kreis die Fläche 4π .

Aufgabe 18 (30 Punkte, 2 Versuche)

Ein Königreich besteht aus einem König und 65 einfachen Bürger*innen. Alle 66 Einwohner*innen erhalten ein Gehalt von einem Euro. Der König möchte sein Gehalt erhöhen. Er kann Vorschläge zur Umverteilung der Gehälter unterbreiten, darf jedoch nicht selbst darüber abstimmen. Wenn mehr Bürger*innen für einen seiner Vorschläge stimmen als dagegen, wird der Vorschlag angenommen. Das Gehalt jeder Person muss eine ganze Zahl sein, und die Summe aller Gehälter muss 66 betragen. Jede*r Bürger*in stimmt jedem Vorschlag zu, bei dem sie oder er danach mehr Geld verdient als zuvor, lehnt aber jeden Vorschlag ab, bei dem sie oder er danach weniger Geld verdient als zuvor, und enthält sich der Stimme, wenn ihr oder sein Stundenlohn unverändert bleibt. Der König handelt egoistisch und klug.

Was ist das maximale Gehalt, das er sich auf diese Weise durch eine Reihe aufeinanderfolgender Vorschläge sichern kann?

Ausarbeitung Aufgabe 18

Der Kerngedanke besteht darin, dass der König das Gesamtgehalt fortlaufend auf immer weniger Einwohner*innen konzentriert, indem er bei jedem Schritt nur etwas mehr als die Hälfte der Einwohner*innen belohnt.

Schritt 1. Der König schlägt vor, die Gehälter von 33 Bürger*innen von 1 auf 2 Euro anzuheben, finanziert durch die Kürzung der Gehälter der übrigen 33 Bürger*innen (einschließlich seiner selbst) auf 0 Euro. Die 33 Begünstigten stimmen dafür, die anderen 32 dagegen, er selbst stimmt ja nicht mit ab. Der Vorschlag wird angenommen.

Schritt 2. Betrachten wir nun die 33 Bürger*innen mit einem Gehalt von 2 Euro. Der König schlägt vor, die Gehälter von 17 von ihnen zu erhöhen (auf 3 oder 4 Euro), während er die Gehälter der übrigen 16 auf 0 Euro senkt. Die 17 Begünstigten stimmen dafür, die 16 Benachteiligten stimmen dagegen, so dass der Vorschlag angenommen wird.

Fortsetzung. Durch die Wiederholung dieser Strategie verringert der König nach und nach die Zahl der Bürger*innen mit positiven Gehältern, während er gleichzeitig die Gehälter der Angehörigen einer ausgewählten Mehrheitsgruppe erhöht. Die Größe dieser Mehrheitsgruppe entwickelt sich wie folgt:

$$33 \rightarrow 17 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2.$$

Bei jedem Schritt sorgt eine knappe Mehrheit dafür, dass der Vorschlag angenommen wird.

Letzter Schritt. Wenn nur noch zwei Bürger*innen über hohe Gehälter verfügen, kann der König diese nicht mehr auf einen einzigen reduzieren, ohne die Unterstützung der Mehrheit zu verlieren. Tatsächlich müssen mindestens zwei Bürger*innen davon profitieren, um genügend Stimmen zu sichern. An diesem Punkt nimmt der König eine strategische Umverteilung vor: Er gibt jeweils 1 Euro an drei mittellose Bürger*innen (und sichert sich so deren Stimmen) und überträgt den verbleibenden Gehaltsbetrag auf sich selbst. Da das Gesamtgehalt immer 66 Euro beträgt und 3 Euro zur Sicherung der Stimmen der drei Bürger*innen verwendet werden, kann der König 63 Euro für sich behalten. Besser

geht es nicht, da er stets eine absolute Stimmenmehrheit herstellen muss, was ihn dazu zwingt, in der letzten Phase mindestens 3 Euro an andere Bürger*innen zu verteilen.

Aufgabe 19 (30 Punkte, 2 Versuche)

Was ist die 100^{te} Stelle hinter dem Komma der folgenden Zahl?

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{2026^{2026}}$$

Ausarbeitung Aufgabe 19

Wir betrachten für jede gerade natürliche Zahl n den Ausdruck

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n.$$

Mithilfe des Binomischen Lehrsatzes entwickeln wir beide Terme:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k (\sqrt{3})^{n-k},$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\sqrt{3})^{n-k} (\sqrt{2})^k.$$

Wenn wir die beiden rechten Seiten addieren und entsprechende Terme zusammenfassen, erhalten wir

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{3})^{n-k} (\sqrt{2})^k (1 + (-1)^k).$$

Wenn k ungerade ist, dann ist $1 + (-1)^k = 0$ und die Terme verschwinden. Wenn k gerade ist, dann ist $1 + (-1)^k = 2$. Somit erhalten wir:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^n 2 \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k (\sqrt{3})^{n-k}.$$

Für gerades k ist

$$(\sqrt{2})^k (\sqrt{3})^{n-k} = 2^{k/2} \cdot 3^{(n-k)/2},$$

eine ganze Zahl. Daher ist die ganze Summe ganzzahlig.

Nun beachten wir:

$$0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1,$$

also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n = 0.$$

Daher ist

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = z - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$$

eine ganze Zahl z minus eine sehr kleine positive reelle Zahl für große n .

Daher liegt für ausreichend große gerade Zahlen n die Zahl $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$ knapp unter einer ganzen Zahl, was bedeutet, dass ihre Dezimalentwicklung mit einer Folge von sehr vielen 9en nach dem Komma beginnt.

Zur Überzeugung, dass der Exponent $n = 2026^{2026}$ groß genug ist, können wir folgenderweise (ohne Taschenrechner!) überlegen: Da $\sqrt{3} = 1.7... < 1.8$ und $\sqrt{2} = 1.4... > 1.4$, ist $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1.8 - 1.4 = 0.4$. Die dritte Potenz erfüllt dann

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 < (0.4)^3 = 0.064 < \frac{1}{10}.$$

Daraus folgt

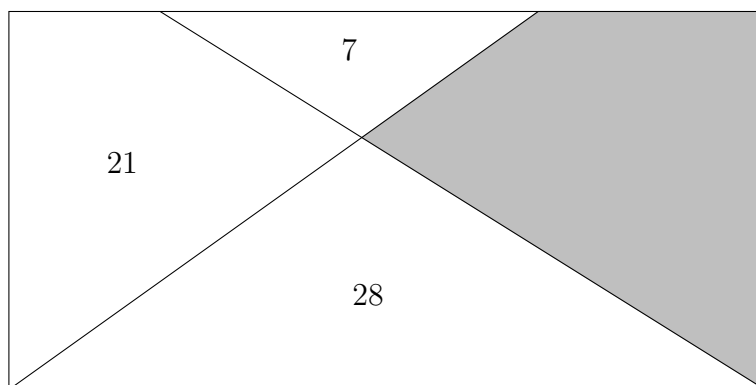
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{300} = \left((\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 \right)^{100} < \frac{1}{10^{100}},$$

und somit $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^n < \frac{1}{10^{100}}$ für alle $n \geq 300$.

Also für alle $n \geq 300$ (insbesondere für den riesengroßen Exponent $n = 2026^{2026}$) fängt die Dezimalentwicklung von $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$ mit mindestens 100 Nullen an. Somit hat die Dezimalentwicklung von $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$ mindestens 100 9n nach dem Komma, wie behauptet.

Aufgabe 20 (20 Punkte, 3 Versuche)

Ein Rechteck wird in zwei Dreiecke und zwei Vierecke unterteilt. Die Flächen der Dreiecke betragen 7 und 28, und die Fläche eines der Vierecke beträgt 21.



Wie groß ist die Fläche des anderen (schattierten) Vierecks?

Ausarbeitung Aufgabe 20

Wir bezeichnen die Grundseite des Rechtecks mit b und seine Höhe mit h . Die beiden Dreiecke sind ähnlich, da ihre entsprechenden Winkel gleich sind. Da die Fläche des unteren Dreiecks das Vierfache der Fläche des oberen Dreiecks beträgt, ist die Höhe des unteren Dreiecks doppelt so groß wie die des oberen Dreiecks. Daraus folgt, dass das untere Dreieck die Grundseite b und die Höhe $\frac{2}{3}h$ hat. Da seine Fläche 28 beträgt, gilt

$$\frac{1}{2}b \left(\frac{2}{3}h \right) = 28 \quad \Rightarrow \quad bh = 84.$$

Das bedeutet, dass das gesamte Rechteck eine Fläche von 84 hat, und somit ist die gesuchte Fläche

$$84 - 7 - 21 - 28 = 28.$$