Packen von Rechtecken

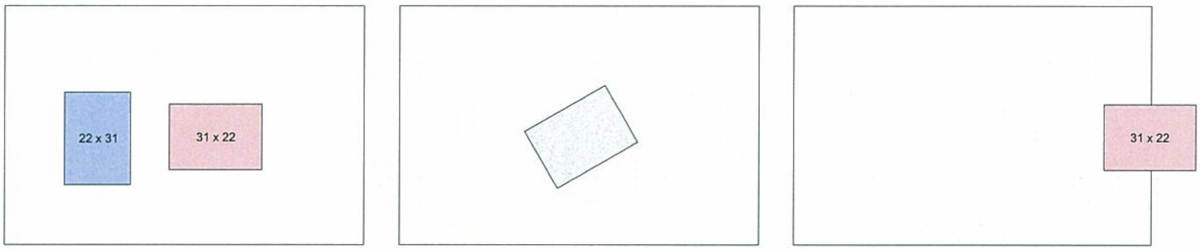
Stefan Hougardy
Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

9. September 2011

1 Packen von kongruenten Rechtecken

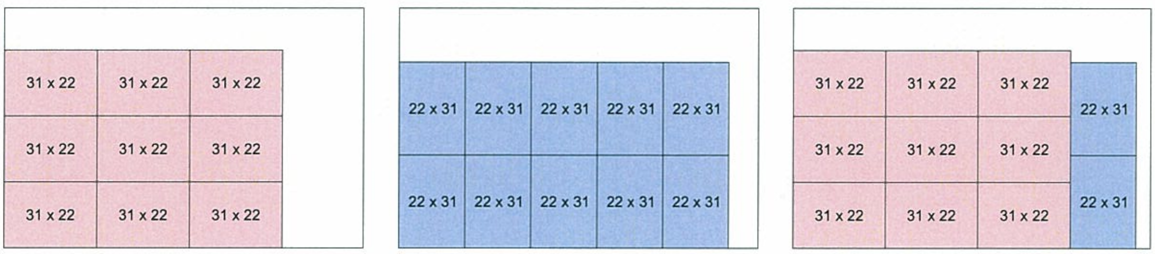
1.1 Ein einführendes Beispiel

Eine Europalette hat die Abmessungen 80 cm $\times$ 120 cm. Wie viele Papierkartons der Abmessung 22 cm $\times$ 31 cm lassen sich auf eine solche Palette laden, wenn man davon ausgeht, dass die Seiten eines jeden Kartons parallel zu dem Rand der Palette sein müssen und die Kartons nicht übereinander gestapelt werden dürfen?



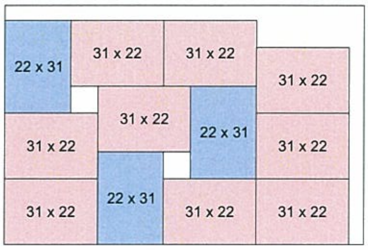
erlaubt verboten verboten

Die Palette hat eine Fläche von 80 cm $\times$ 120 cm $= 9600$ cm^2, ein Karton belegt eine Fläche von 22 cm $\times$ 31 cm $= 682$ cm^2, somit passen höchstens $9600/682 = 14,076...$ Kartons auf die Palette. Man findet nun leicht Lösungen, die zeigen, dass man 9, 10 oder 11 Kartons auf die Palette laden kann:

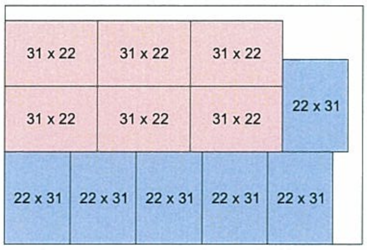


9 Kartons 10 Kartons 11 Kartons

Lassen sich auch mehr als 11 Kartons unterbringen? Die folgenden Lösungen zeigen, dass man mindestens 12 Kartons auf die Palette laden kann:



12 Kartons



12 Kartons

Man kann zeigen (siehe Übungsaufgaben), dass sich nicht mehr als 12 Kartons auf die Palette laden lassen. Bevor wir uns intensiver mit der Frage beschäftigen, wie viele Kartons einer gegebenen Größe sich auf eine Palette laden lassen, formulieren wir das Problem zunächst als allgemeines Rechteckpackproblem.

1.2 Definition des Rechteckpackproblems

Offensichtlich spielt die Höhe der Kartons beim Beladen der Palette keine Rolle. Wir können das Problem, eine Palette mit Kartons zu beladen daher auch als ein Problem ansehen, bei dem in ein großes Rechteck (die Palette) möglichst viele kleine Rechtecke (die Kartons) gepackt werden sollen. Wir formulieren dies wie folgt:

Definition. Ein Rechteck heißt **achsenparallel**, falls je zwei seiner Seiten zur x- bzw. zur y-Achse parallel sind. Wir sagen, dass n achsenparallele Rechtecke $r_1, \ldots, r_n$ eine **Rechteckpackung** eines achsenparallelen Rechtecks R bilden, falls gilt:

- kein Punkt von $r_1, \ldots, r_n$ liegt außerhalb von R.
- je zwei der Rechtecke $r_1, \ldots, r_n$ schneiden sich höchstens in ihren Rändern.

Wir sagen in diesem Fall auch, dass sich die Rechtecke $r_1, \ldots, r_n$ in das Rechteck R **packen lassen**.

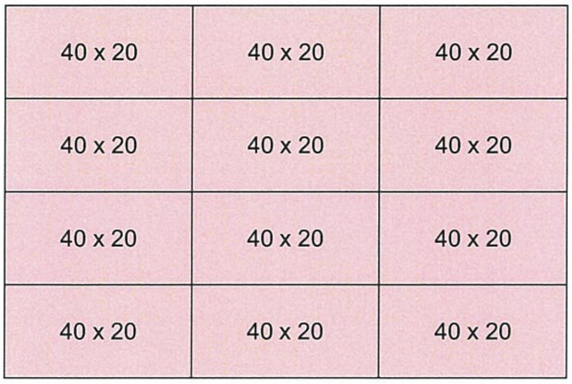
Bis heute kennt man kein effizientes Verfahren, das einem sagt, ob sich eine gegebene Menge von n Rechtecken in ein Rechteck R packen lässt. Für eine spezielle Version dieses Problems werden wir jedoch eine einfache Lösung angeben.

Definition. Eine Rechteckpackung heißt **perfekt**, falls der Flächeninhalt der Rechtecke $r_1, \ldots, r_n$ genau so groß ist, wie der Flächeninhalt des Rechtecks R.

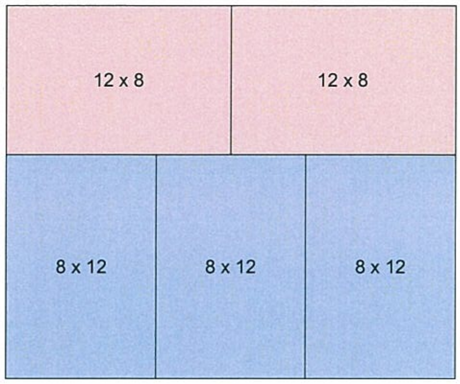
Bei einer perfekten Rechteckpackung bleibt also — im Gegensatz zu den Kartonpackungen auf der Europalette, die wir in Abschnitt 1.1 kennen gelernt haben — kein ungenutzter Platz übrig.

1.3 Perfekte Packungen mit kongruenten Rechtecken

Wir wollen in diesem Abschnitt ein Ergebnis beweisen, das zeigt, welche Abmessungen ein Rechteck r haben muss, damit sich ein gegebenes Rechteck R mit zu r kongruenten Rechtecken perfekt packen lässt. Dazu schauen wir uns zunächst zwei Beispiele solcher Packungen an:



perfekte Packung mit 12 Rechtecken



perfekte Packung mit 5 Rechtecken

Offensichtlich muss die Fläche des Rechtecks R ein ganzzahliges Vielfaches der Fläche der Rechtecks r betragen. Allerdings ist dies keine hinreichende Bedingung dafür, dass eine solche Packung existiert. Zum Beispiel kann man ein 6×10-Rechteck nicht perfekt mit 4×5 Rechtecken packen, obwohl $3 \cdot (4 \times 5) = 6 \times 10$ gilt.

Satz 1. *Falls sich ein Rechteck der Abmessung $c \times d$ perfekt mit Rechtecken der Abmessung $a \times b$ packen lässt, so müssen a und b jeweils eine der Zahlen c oder d teilen.*

Zum Beweis von Satz 1 benutzen wir Satz 2:

Satz 2. *Falls sich ein Rechteck R perfekt mit Rechtecken packen lässt, die jeweils mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge haben, so hat auch R mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge.*

Beweis. Färbe R schachbrettartig mit schwarzen und weißen $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ - Quadraten, beginnend in der linken unteren Ecke von R. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für eine solche Färbung.