Folgen in der Analysis

Herbert Koch

15. September 2011

Sehen wir uns zunächst die in einer typischen Anfängervorlesung (hier aus dem Buch von Hildebrandt: Analysis 1) formulierten Axiome der reellen Zahlen an.

Axiome der reellen Zahlen. Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ von Elementen $a, b, c, \dots,$ reelle Zahlen genannt, die drei Gruppen von Axiomen (Grundgesetzen) erfüllen:

(I) Die algebraischen Axiome.
(II) Die Anordnungsaxiome.
(III) Das Vollständigkeitsaxiom.

(I) **Die algebraischen Axiome**. *In* $\mathbb{R}$ *gibt es zwei Operationen*, Addition *und* Multiplikation *genannt, die jedem Paare* a, b *von Elementen aus* $\mathbb{R}$ *zwei weitere Elemente* $a+b \in \mathbb{R}$ *und* $ab \in \mathbb{R}$ *(oder* $a \cdot b$*) zuordnen, die* Summe *und* Produkt *von* a, b *heißen. Die Operationen der Addition und Multiplikation genügen folgenden Regeln.*

(I.1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(Assoziativgesetz)*

(I.2) $a+b = b+a$ *(Kommutativgesetz)*

(I.3) *Es gibt genau eine Zahl in* $\mathbb{R}$*, die* Null *genannt und mit* 0 *bezeichnet wird, so daß* $a+0=a$ *ist für jedes* $a \in \mathbb{R}$.

(I.4) *Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es genau ein* $b \in \mathbb{R}$*, so daß* $a+b=0$ *ist. Wir bezeichnen* b *mit dem Symbol* $-a$ *und nennen diese Zahl das zu* b negative Element.

(I.5) $(ab)c = a(bc)$ *(Assoziativgesetz)*

(I.6) $ab = ba$ *(Kommutativgesetz)*

(I.7) *Es gibt genau eine reelle Zahl, die* Eins *genannt und mit* 1 *bezeichnet wird, die von* 0 *verschieden ist und* $a \cdot 1 = a$ *für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *erfüllt.*

(I.8) *Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \neq 0$ *gibt es ein eindeutig bestimmtes Element* $b \in \mathbb{R}$ *mit* $b \neq 0$ *, so daß* $ab = 1$ *ist. Wir bezeichnen* b *mit* a^{-1} *oder* $\frac{1}{a}$ *oder* $1/a$ *und nennen* a^{-1} *das zu* a inverse Element.

(I.9) $a(b+c) = ab+ac$ *(Distributivgesetz)*

(II) **Die Anordnungsaxiome**. *Für beliebige reelle Zahlen a, b steht fest, ob sie gleich ($a = b$) oder ungleich ($a \neq b$) sind. Zwischen verschiedenen (d.h. ungleichen) Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ besteht eine Anordnung, die mit dem Symbol „$<$" bezeichnet wird und besagt, daß genau eine der beiden Relationen $a < b, b < a$ gilt. Mit anderen Worten: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen*

$$a < b\,, \quad a = b\,, \quad b < a\,.$$

Die Anordnungsbeziehung genügt den folgenden Axiomen:

(II.1) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

(II.2) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(II.3) Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.

(III) **Das Vollständigkeitsaxiom**. *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke; diese wird* **Supremum von M** *genannt und mit $\sup M$ bezeichnet.*

In der *Mathematikvorlesung* folgen elementare Konsequenzen der Axiome. Danach werden typischerweise Folgen und die Konvergenz von Cauchyfolgen diskutiert.
Es folgen Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integral und spezielle Funktionen $(e^x, \ln, \sin, \cos, \tan, \arctan, \sinh)$.
In der Analysis 2 wird die Idee der Ableitung mit der linearen Algebra verknüpft. Die durch die Jacobimatrix dargestellte totale Ableitung ist eine lineare Approximation, eine bereits in der Analysis 1 angelegte Idee.
Maß und Integral sind die zentralen Objekte der Analysis 3, mit der Konstruktion des Lebesguemaßes, den Lebesgueschen Konvergenzsätzen, dem Satz von Fubini und der Transformationsformel.

In der *Schule* treten die reellen Zahlen implizit zuerst in der Geometrie auf: Die Zahlengerade hat keine Lücken, man kann die Diagonale eines Quadrates der Kantenlänge 1 auf der Zahlengerade abtragen, was die Frage nach der Existenz von $\sqrt{2}$ beantwortet.
In Klasse 8 interessiert man sich für die Existenz von Zahlen, deren Quadrat 2 ergibt. Für die Existenz argumentiert man mit einem Axiom, der Intervallschachtelung. *In der Schule ist kaum von Axiomen die Rede, aber zumindest in der Mathematikdidaktik werden Leitvorstellungen eine wesentliche Bedeutung zugemessen. Leitvorstellungen und Axiome sind nicht identisch, dennoch scheinen mir Grundvorstellungen in vieler Hinsicht Axiomen in der universitären Mathematik zu entsprechen.*
Die Behandlung der Analysis in der Oberstufe scheint nicht mehr auf die Grundvorstellungen der reellen Zahlen zurückzugreifen, ein meines Erachtens großer Unterschied zwischen Universität und Schule, und ein Punkt, den wir uns genauer ansehen werden.

Dieser Befund legt einen starken Gegensatz nahe:
Mathematische Strenge an der Universität versus verwässerte Mathematik und Ansprüche in der Schule?
Elfenbeinturm versus Inhalt?

Wie immer man über den Konflikt denken mag, er ist jedenfalls nicht neu.

Felix Klein (1908): Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkt mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat [...] Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht kaum einen Einfluss hat.

Das Zitat

René Thom (1973): The real problem which confronts mathematics teaching is not that of rigour, but the problem of the development of 'meaning', of the 'existence' of mathematical objects.

legt es nahe, Probleme, Argumente und 'Mathematik' an Schule und Universität nicht als grundverschiedene Objekte zu sehen.

Thesen:

1. Die Mathematik an der Schule muß und darf um der Schüler und ihres Auftrags willen andere Wege gehen als die universitäre Mathematik. Das gilt, mit etwas anderer Gewichtung, auch für die Lehramtsausbildung.
2. Die Mathematik an der Schule hat einen Auftrag im Bereich der Allgemeinbildung, der Persönlichkeitsbildung, der gesellschaftlichen Teilhabe, und der Propädeutik. Eine Akzeptanz der von Klein beschriebenen Diskontinuität konterkariert diesen Auftrag und insbesondere die Lehrerausbildung.
3. Es gibt wesentliche Gemeinsamkeiten bei den Argumentationslinien und dem Aufbau von Leitvorstellungen an Schule und Universität. Anders gesagt, trotz notwendiger und starker Unterschiede zwischen Schule und Universität in der Behandlung mathematischer Themen handelt es sich um die gleiche Mathematik.

Das Thema der Folgen hat eine wechselhafte Geschichte in der Schule und der Mathematikdidaktik (*siehe Tietze, Klika und Wolpers, Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*). Die Mathematikdidaktik scheint sich von der Vorstellung der Behandlung von Folgen als 'Vorkurs' zur Analysis mit mich überzeugenden Argumenten abgewendet zu haben. Es scheinen Ansätze sichtbar zu werden (siehe *Danckwerts und Vogel: Analysis verständlich unterrichten*), bei denen Folgen ein größeres Gewicht erhalten: Folgen sind der natürliche Rahmen für Zeitreihen (z.B. Medikamentenspiegel im Körper) und iterative Prozesse (Modell $d_{i+1} = \frac{3}{4}d_i + 100$ für den Medikamentenspiegel), Markovprozesse und Approximationen. Die Bedeutung der Vollständigkeit der reellen Zahlen wird man ohne Folgen nicht erfassen können.

Ich möchte am Beispiel von Volumen und Flächeninhalt Argumentationslinien und Leitvorstellungen diskutieren.

Vorstellungen von Flächeninhalt und Volumen

1. Grundschule, Klasse 5: Zählen von Quadraten und Würfeln, Dreiecke, die Koordinatenrechtecke mit ganzzahligen Kantenlängen halbieren, Kombinationen dieser Objekte. Allgemeine Rechtecke. Räumliches Vorstellungsvermögen.
2. Klasse 6: Allgemeine Dreiecke. Polygone bzw. Vielecke.
3. Klasse 8: Vielecke, Umfang und Flächeninhalt des Kreises. Volumen des Prismas.
4. Klasse 9: Pyramide, Kegel. Prinzip von Cavalieri, Volumen der Kugel.
5. Klasse 11: Integral.

Das Paradoxon von Banach und Tarski 1924: Die Kugel mit Radius 1 kann in 6 Teile zerlegt werden, die wiederum zu zwei Kugeln vom Radius 1 zusammengesetzt werden können.
Das widerspricht dem naiven Verständnis von Flächeninhalt und Volumen und zeigt Grenzen des naiven Zugangs auf. Andere Grenzen zeigen sich z.B. in den nicht ganz einfachen Begriffen der Länge einer Kurve und der Oberfläche eines Körpers. Was meinen wir damit, dass die Oberfläche der Kugel 4π ist, und die Länge des Kreises 2π? Im zweiten Fall verwenden wir die Vorstellung einer Schnur, die wir um die Kreisscheibe legen - was aus guten Gründen selten durchgeführt wird.
Das Paradoxon von Banach und Tarski erschüttert Kontruktionen und Argumente bis weit in die Schulmathematik genauer gesagt bis in Klasse 6 hinein. So ist der Flächeninhalt des Dreiecks $1/2$ mal Seitenlänge mal Höhe. Diese Formel können wir auf alle drei Seiten anwenden. In jedem Fall kommt das gleiche Ergebnis heraus. Wenn wir den Flächeninhalt nicht verwenden, dann ist es nicht leicht, einzusehen, dass das Produkt von Kantenlänge mal Höhe in allen drei Fällen gleich ist.

Ist der Flächeninhalt aber keine fundamentale Größe, so bricht uns das Argument für die Gleichheit der Produkte zusammen.

Die mathematische Antwort ist die *Integrationstheorie von Lebesgue*. Etwas vereinfacht konstruiert man das Lebesguemaß auf gewissen Mengen, wobei man die Klasse der Mengen sukzessive erweitert: Man kann mit der endlichen Vereinigung achsenparalleler Quadrate oder Würfel mit fester Kantenlänge anfangen. Im zweiten Schritt erhält man offene Mengen, in einem dritten ein äußeres Maß auf allen Mengen, das man dann auf die Lebesguemengen einschränkt.

Insbesondere sind Flächeninhalt, Volumen und Lebesguemaß abgeleitete Größen!

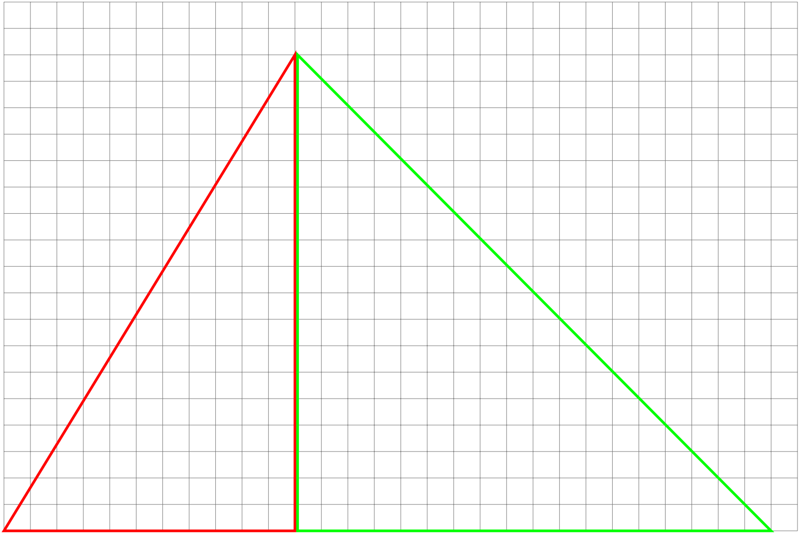
Eine elementare Betrachtung

Wir betrachten ein Dreieck mit Kantenlänge l und Höhe h. Wir wählen eine kleine Zahl a und zählen einerseits die Koordinatenquadrate mit Kantenlänge a im Dreieck und die Zahl der Quadrate, die das Dreieck schneiden.
Es gilt:

1. Die Anzahlen unterscheiden sich um höchsten $2 * Umfang/a + 3$.
2. Die Differenz von a^2 mal der Anzahl und $\frac{1}{2}hl$ ist höchstens $2 * Umfang * a + 3a^2$.
3. Daher ist das Produkt für alle drei Seiten gleich.

Vergleich mit Rechteck beim rechtwinkligen achsenparallelen Dreick

Zerlegung bei achsenparalleler Seite



Zerlegung im allgemeinen Fall

Konsequenz: Sei s_1 eine Seitenlänge, h_1 eine Höhe, s_2 eine zweite Seitenlänge und h_2 eine zweite Höhe, a eine kleine Zahl und A sie a^2 mal die Zahl der Koordinatenquadrate mit Kantenlänge a im Dreieck, L die Summe der Umfänge der Dreiecke.

Es folgt

$$|\frac{1}{2}s_1 h_1 - A| \leq 2La + 3a^2$$

und

$$|\frac{1}{2}s_2 h_2 - A| \leq 2La + 3a^2$$

also mit der Dreiecksungleichung

$$|\frac{1}{2}s_1 h_1 - \frac{1}{2}s_2 h_2| \leq |\frac{1}{2}s_1 h_1 - A - (\frac{1}{2}s_2 h_2 - A)| \leq 4La + 6a^2$$

für jede Zahl a. Es folgt

$$\frac{1}{2}s_1 h_1 = \frac{1}{2}s_2 h_2.$$

Bedeutung und analoge Argumentationen

1. Diese Betrachtung sieht den Flächeninhalt als analytisches Objekt. Man sieht die Verbindung zur Vollständigkeit der reellen Zahlen und der Intervallschachtelung.
2. Eine leichte Modifikation zeigt, dass das Ergebnis der Flächenbestimmung von Vielecken durch eine Zerlegung in Dreiecke unabhängig von der Zerlegung ist.
3. Es gibt starke Analogien zum Verfahren des Archimedes zur Bestimmung des Flächeninhalts des Kreises.
4. Es gibt starke Analogien zur Definition des Integrals.
5. Das Prinzip von Cavalieri und der Satz von Fubini folgen mit einer analogen Argumentation.
6. Dieses Argument eröffnet die Möglichkeit, den Flächeninhalt als eine zu definierende (und damit abgeleitete) Größe zu betrachten.

Warum ist die Vollständigkeit der reellen Zahlen auch für die Schule wichtig?

Ich möchte mich auf einen Grund beschränken. In der Literatur über die Schule wird meines Erachtens zu Recht die Bedeutung des fachlischen Argumentierens hervorgehoben. Eine mathematische Argumentation erfordert eine Reflektion der Grundannahmen. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen spielt in der Analysis (auch geschichtlich begründet) eine überragende Rolle. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen steht meines Erachtens in einer überaus engen Beziehung zu vielen fundamentalen Vorstellungen der Schulmathematik, und ich sehe die vielversprechende Möglichkeit, diese Beziehung herauszuarbeiten, und die jahrgangsübergreifenden roten Fäden zu stärken.