GOLDENER SCHNITT UND FIBONACCI-FOLGE

NORA LOOSE

1. Der Goldene Schnitt - Eine Irrationalität am Ordenssymbol der Pythagoreer

Schon im 5. Jahrhundert v. Chr. entdeckte ein Pythagoreer eine Konsequenz der Unvollständigkeit der rationalen Zahlen: Auf jeder Strecke gibt es Punkte, die diese in keinem ganzzahligen Verhältnis teilen, zum Beispiel die Punkte des Goldenen Schnittes.
Ein Punkt P teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt, wenn für die Längen $a = \overline{AP}$ und $b = \overline{PB}$ gilt:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

Das Verhältnis $g = \frac{a}{b}$ nennt man den Goldenen Schnitt.

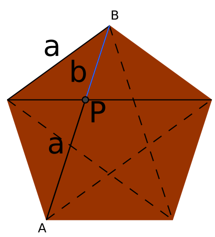

Abbildung 1. Goldener Schnitt im regelmäßigen Fünfeck

Im Pentagramm, das entsteht, wenn man im regelmäßigen Fünfeck die Diagonalen nachzieht, findet man zu jeder Strecke und Teilstrecke ein Gegenstück, das mit ihr im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht.
Man erzählt, dass die Pythagoreer durch den Fund dieser Irrationalität am Pentagramm, ihrem Ordenssymbol, in eine Weltanschauungskrise gestürzt worden seien. Der Entdecker Hippasos von Metapont sei aus der Gemeinschaft der Pythagoreer ausgeschlossen worden und später im Meer ertrunken, was als göttliche Strafe für seinen Frevel gedeutet wurde.

Aufgabe 1. (Unterrichtspraxis)
Aus Gleichung (1) erhält man

$$g = 1 + \frac{1}{g} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow g^2 = g + 1. \tag{3}$$

Nach Definition ist $g > 0$.

a) Beweisen Sie, dass g irrational ist, indem Sie $g = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, ansetzen und dies zu einem Widerspruch führen.
b) Stellen Sie die Zahl g durch Lösen der quadratischen Gleichung (3) als einen Ausdruck dar, der eine Quadratwurzel beinhaltet.

2. Kettenbruchdarstellung des Goldenen Schnittes

Unser Ziel ist es nun, eine Folge rationaler Zahlen zu finden, die gegen den Goldenen Schnitt konvergiert.
Durch wiederholte Anwendung von Gleichung (2) ergibt sich:

$$g = 1 + \frac{1}{g} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{g}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{g}}}} = \dots$$

Wir vermuten deshalb, dass sich der Goldene Schnitt durch die endlichen Kettenbrüche der Form

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \dots \tag{4}$$

annähern lässt.

Aufgabe 2. (Unterrichtspraxis und GeoGebra)

a) Beschreiben Sie das rekursive Bildungsgesetz der Folge (a_n)! Notieren Sie die ersten 10 Werte der Folgenglieder als gekürzte Brüche!
b) Tragen Sie die ersten paar Werte der Folge (a_n) mit GeoGebra auf einen Zahlenstrahl auf!
Wo liegt der Goldene Schnitt auf dem Zahlenstrahl? Benutzen Sie dafür die in Aufgabe 1 b) hergeleitete Darstellung für g.
c) Was beobachten Sie? Welche Strategie könnte man verfolgen, um die Konvergenz der Folge (a_n) zu zeigen?

Bevor wir uns der Aufgabe stellen, die Konvergenz der Folge (a_n) gegen den Goldenen Schnitt zu beweisen, wollen wir eine andere Interpretation der Folgenglieder a_n entdecken und ein geometrisches Zauberkunststück vollführen.
Dabei wird uns die berühmte Folge der Fibonacci-Zahlen helfen.

2.1. Die Fibonacci-Zahlen.

Die (unbeschränkte) Fibonacci-Folge ist definiert durch das rekursive Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Die jeweils folgende Zahl ergibt sich also durch Addition ihrer beiden Vorgänger:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots$$

Ihren Namen hat die Fibonacci-Folge von Leonardo von Pisa, auch Leonardo Fibonacci („Sohn des Bonacci“) genannt, der damit 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb.

2.2. **Die Folge der Fibonacci-Quotienten.** Wir betrachten nun das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Zahlen der Fibonacci-Folge:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Wie vielleicht schon in Aufgabe 2 a) vermutet, ist die Folge dieser „Fibonacci-Quotienten“ nichts anderes als die Folge (a_n).

Aufgabe 3. (Rationales Argumentieren)
Beweisen Sie dies durch vollständige Induktion, indem Sie die Rekursionsformel für (a_n) aus Aufgabe 2 a) benutzen!

2.3. **Ein Zaubertrick (Bearbeitung optional).** Wir zerschneiden ein Quadrat der Seitenlänge 13 wie abgebildet und fügen es zu einem Rechteck der Seitenlängen 8 und 21 zusammen.

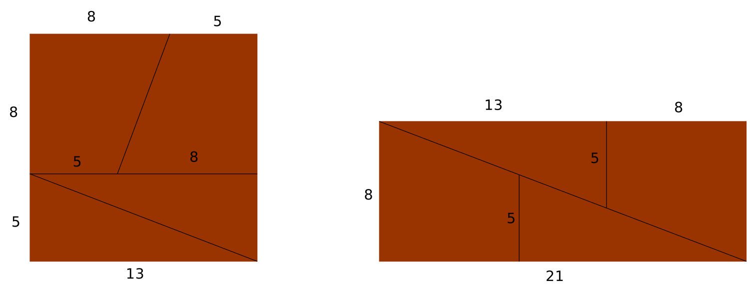

Abbildung 2

Ein Vergleich der Flächeninhalte ergibt für das Quadrat $13 \cdot 13 = 169$, für das Rechteck allerdings nur $8 \cdot 21 = 168$.
„Zauberei?“, fragen Sie Ihre Schüler.

Das Kunststück funktioniert auch mit jedem anderen Quadrat, dessen Seitenlänge eine Fibonacci-Zahl f_n ist: Da $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, können wir das Quadrat wie angegeben aufteilen und wieder zum einem Rechteck zusammensetzen:

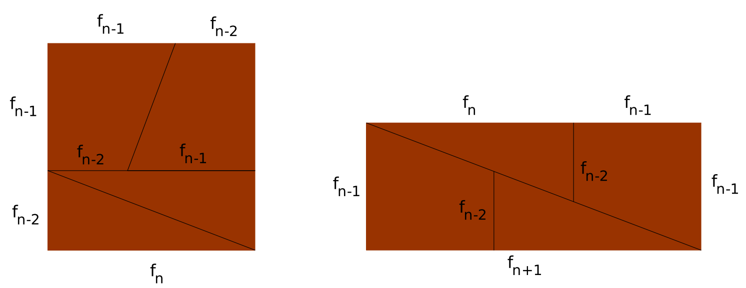

Abbildung 3

Für den Flächeninhalt des Quadrat bekommt man f_n^2, der Flächeninhalt des Rechtecks beläuft sich auf $(f_n + f_{n-1}) \cdot f_{n-1} = f_{n+1} \cdot f_{n-1}$.
Behauptung: Diese Flächeninhalte unterscheiden sich immer um eine Einheit.
Das ist gerade die Aussage der sogenannten Simpson-Identität:
für $n \geq 2$ gilt

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n. \tag{5}$$

Aufgabe 4. (Rationales Argumentieren)
Beweisen Sie die Simpson-Identität durch vollständige Induktion!

Um hinter das Geheimnis des Tricks zu kommen, lassen Sie Ihre Schüler entweder basteln oder mit GeoGebra konstruieren:

Aufgabe 5. (GeoGebra)
Konstruieren Sie das Quadrat und das Rechteck mit den in Abbildung 2 angegebenen Seitenlängen!
Bestimmen Sie die Steigungen der Diagonalen!

Aufgabe 6. (Unterrichtspraxis)
Bestimmen Sie für den allgemeinen Fall (Abbildung 3) die Steigungen der Diagonalen!
Argumentieren Sie mithilfe der Vermutungen aus Aufgabe 2 c) und der Erkenntnisse aus Abschnitt 2.2, warum der Schwindel mit bloßem Auge kaum aufzudecken ist.

Aufgabe 7. (Rationales Argumentieren und Unterrichtspraxis)
Was passiert, wenn man die Seiten des Quadrats im Goldenen Schnitt teilen würde?
Bestimmen Sie Flächeninhalt von Quadrat und dem zusammengesetzten Rechteck. Erhalten wir jetzt wirklich ein Rechteck?

2.4. **Goldener Schnitt - der einfachste aller unendlichen Kettenbrüche.** Nun wollen wir beweisen, dass die betrachtete Folge $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ tatsächlich konvergiert.
Wie sich nach Aufgabe 2 c) schon vermuten lässt, liegt eine Intervallschachtelung vor.

Aufgabe 8. (Rationales Argumentieren)
Beweisen Sie dies mithilfe der Simpson-Identität (Gleichung (5))!

Jetzt wissen wir, dass die endlichen Kettenbrüche in (4) gegen einen Grenzwert a konvergieren und bezeichnen den Grenzwert mit dem unendlichen Kettenbruch

$$a = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}}}.$$

Nun gilt es noch zu kontrollieren, ob diese Zahl mit dem Goldenen Schnitt übereinstimmt.

Aufgabe 9. (Rationales Argumentieren)
Tun Sie dies, indem Sie prüfen, ob a der definierenden Eigenschaft (2) des Goldenen Schnitts genügt!

Der Goldene Schnitt ist also in gewisser Weise der „einfachste“ aller unendlichen Kettenbrüche, da seine Kettenbruchentwicklung nur Einsen enthält.

Das hat aber gleichzeitig zur Folge, dass der Goldene Schnitt zu denjenigen Zahlen gehört, die besonders schlecht rational approximierbar sind.
Das kann man sich vielleicht folgendermaßen plausibel machen:
Nehmen wir uns zum Vergleich die Kettenbruchentwicklung von π her:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}}}.$$

In einem Kettenbruch erscheint vor jedem Pluszeichen eine ganze Zahl. Je größer diese Zahl ist, umso kleiner ist der Bruch, in dessen Nenner sie steht, und umso kleiner ist daher auch der Fehler, der entsteht, wenn der unendliche Kettenbruch vor diesem Bruch abgebrochen wird. Die Kettenbruchentwicklung von g hat nun aber möglichst kleine Einträge, nämlich ausschließlich Einsen.
In diesem Sinne lässt sich der Goldene Schnitt besonders schlecht durch rationale Zahlen approximieren und wird deshalb auch die „irrationalste aller Zahlen“ genannt.

Literatur

[1] A. Beutelspacher und B. Petri. Der Goldene Schnitt. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
[2] K. Königsberger. Analysis 1. Springer, Berlin, 2004.