Muster und Folgen

Maria Nelles

Folgen können als spezielle Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ aufgefasst werden. Mit Folgen lassen sich iterative Prozesse beschreiben. Typische Beispiele sind Wachstumsprozesse, bei denen sich eine Größe von Jahr zu Jahr ändert oder die Entwicklung bestimmter Zahlenmuster von Stufe zu Stufe. Das Thema kann bereits in der Klasse 5/6 auf im Sinne eines binnendifferenzierenden und begabungsfördernden Unterrichts auf verschiedenen Abstraktionsniveaus behandelt werden. Grundlegende Begriffe der Analysis werden so exemplarisch vorbereitet.

Festlegung und Darstellung von Folgen:

Explizite Festlegung: Das n-te Folgenglied kann direkt mit einer Formel berechnet werden.

$$a_n = f(n) \quad z.B.\ a_n = 2n + 1,\ \ n \geq 0$$

Rekursive Festlegung: Das n-te Folgeglied kann aus dem vorhergehenden mit Hilfe der Rekursionsformel berechnet werden. Der Startwert muss angegeben werden.

$$a_n \ = \ g(a_{n-1}) \qquad\qquad z.B. \quad a_n = a_{n-1} + 2\ , \quad n \geq 1,\ Startwert\ a_0 = 1$$

Folgen lassen sich in Tabellen und Graphen darstellen.

Definition Folgenkonvergenz:

Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls folgendes gilt:

$$\forall \ \ \varepsilon>0 \ \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \ \ n \geq n_0: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

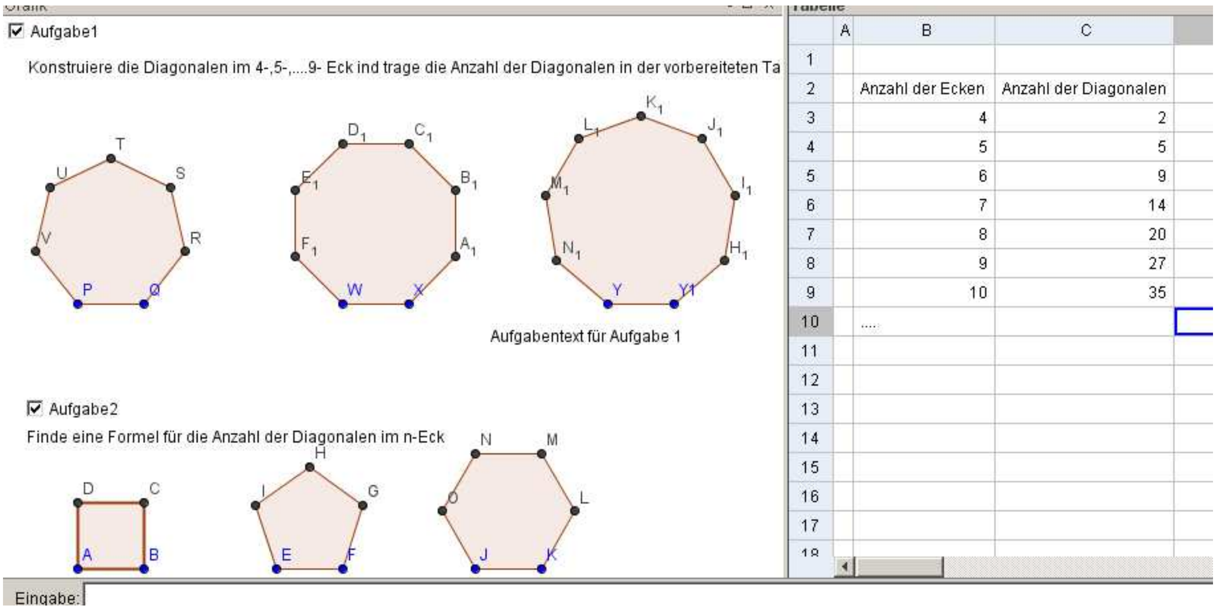
Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

Konkrete Konvergenzaussagen beruhen auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und der Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$. Äquivalent dazu ist die Existenz von Grenzwerten monotoner und beschränkter Folgen.

Geogebra eignet sich besonders wegen der vernetzenden Nutzung von Algebraansicht, Tabellenansicht und Graphikansicht als Werkzeug zum entdeckenden Lernen.

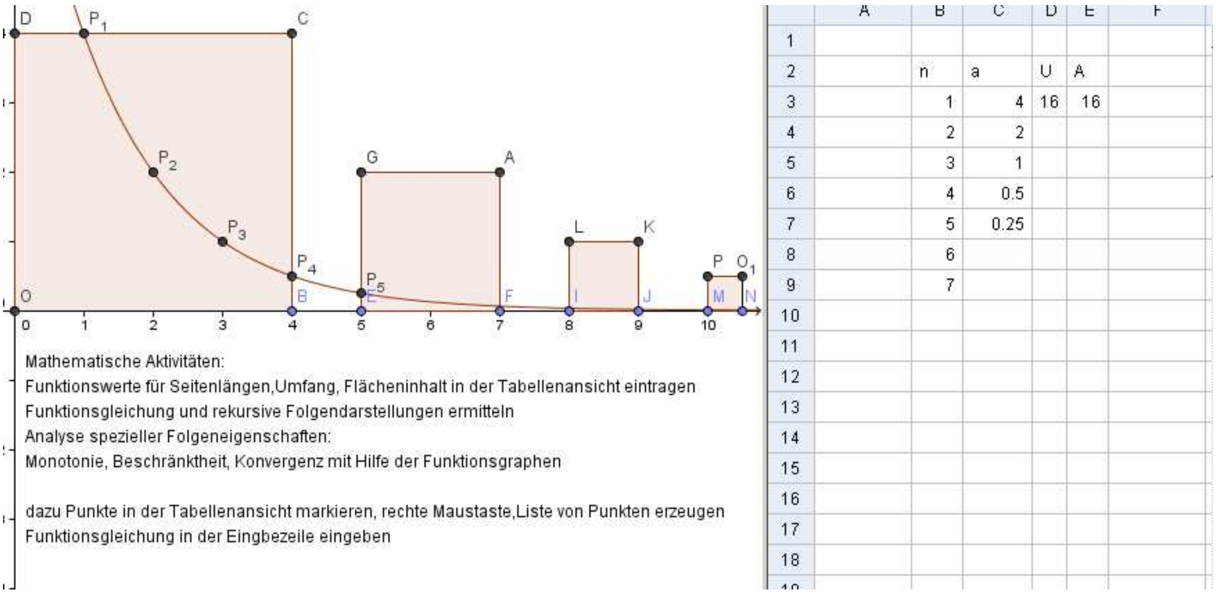
Übung 1 Muster und Folgen Geogebra

Konstruieren Sie ein Geogebra Arbeitsblatt zum Thema Anzahl der Diagonalen im 4-, 5-,....n-Eck. Damit die Vielecke übersichtlich auf dem Zeichenblatt angeordnet sind, konstruieren Sie zunächst die Punkte A und B: z. B. **A=(-2,0).** Dann erzeugen Sie mit Hilfe von: **Vieleck[Punkt, Punkt, Anzahl der Ecken]** die verschiedenen Vielecke in einer übersichtlichen Position auf dem Zeichenblatt. Die Anzahl der Ecken und der Diagonalen in der Tabellenansicht eingetragen werden. Fügen Sie nun verschiedene Aufgabenstellungen mit Kontrollkästchen zum Ein-und Ausblenden verschiedener Aufgabenstellungen ein. Geben Sie zunächst einen Text für Aufgabe 1 ein. Wenn Sie das Icon **„Kontrollkästchen um Objekte anzuzeigen"** auswählen, öffnet sich ein Fenster, in dem Sie das anzuzeigende Objekt also z.B. Text1 auswählen können. Ein Beispiel für ein Geogebra Arbeitsblatt finden Sie unter Diagonalen im Neuneck.ggb.



Bei der Konstruktion des folgenden GeoGebra Arbeitsblattes ist zu beachten, dass man bereits konstruierte Punkte später umbenennen muss, wenn in der Tabellenansicht derselbe Buchstabe benutzt wird. Experimentieren Sie mit den unten angegebenen mathematischen Aktivitäten.

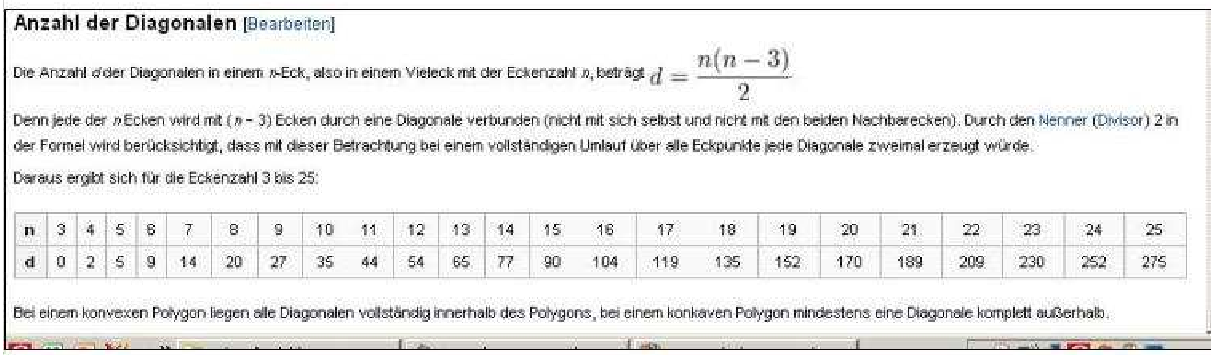
Das fertige Geogbra Arbeitsblatt finden Sie unter: Folge Quadrate.ggb



Lösungen zu Übung 1 Diagonalen im n-Eck:

Muster und Folgen

Maria Nelles



Anzahl der Diagonalen [Bearbeiten]

Die Anzahl d der Diagonalen in einem n-Eck, also in einem Vieleck mit der Eckenzahl n, beträgt $d = \frac{n(n-3)}{2}$

Denn jede der n Ecken wird mit (n − 3) Ecken durch eine Diagonale verbunden (nicht mit sich selbst und nicht mit den beiden Nachbarecken). Durch den Nenner (Divisor) 2 in der Formel wird berücksichtigt, dass mit dieser Betrachtung bei einem vollständigen Umlauf über alle Eckpunkte jede Diagonale zweimal erzeugt würde.

Daraus ergibt sich für die Eckenzahl 3 bis 25:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
d	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119	135	152	170	189	209	230	252	275

Bei einem konvexen Polygon liegen alle Diagonalen vollständig innerhalb des Polygons, bei einem konkaven Polygon mindestens eine Diagonale komplett außerhalb.

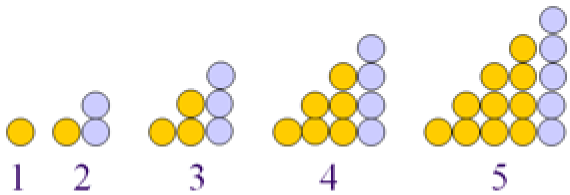
[1]

Übung 2 Muster und Folgen Unterrichtspraxis

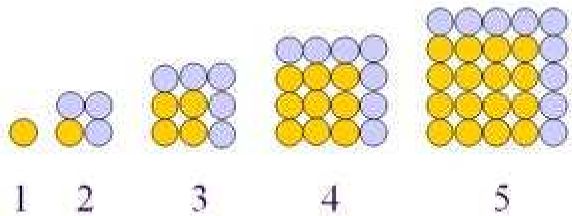
Untersuchen Sie die folgenden Muster z.B. unter folgenden Aspekten:

(1) rekursive Festlegung, explizite Festlegung, Monotonie, Beschränktheit
(2) Für welche Folgen kann man eine Funktionsgleichung finden?
(3) Gibt es Folgen, die man rekursiv, aber nicht explizit darstellen kann? Warum ist das so?
(4) Welche Muster führen auf arithmetische, geometrische Folgen?
(5) Welche Zahlenmuster führen zu Summenfolgen (Reihen)?
(6) Welche Muster führen auf beschränkte Folgen?
(7) Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe $1 + q + q^2 + \cdots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, indem Sie zuerst den Term $(1-q)(1+q+q^2+\cdots q^n)$ berechnen.

Lösung: Kaballo, Einführung in die Analysis S.11



Dreieckszahlen



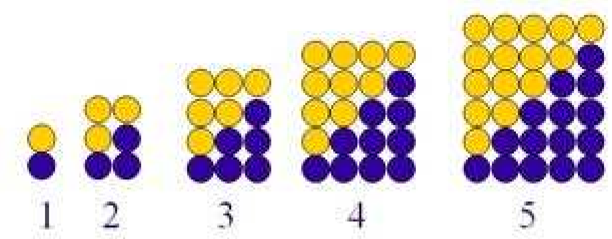
Quadratzahlen

---

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Diagonale_%28Geometrie%29

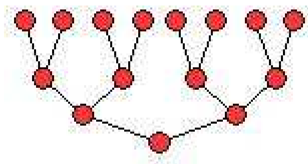
Muster und Folgen

Maria Nelles



Rechteckzahlen

Entwerfen Sie Muster für arithmetische Folgen!



Baummuster

Geogebra kann hier als Werkzeug sehr hilfreich sein. In der Tabellenansicht können verschiedene Folgen tabellarisch dargestellt werden, dann lässt sich mit Hilfe des Kontextmenüs eine Liste von Punkten erzeugen, die dann in der Graphikansicht graphisch dargestellt werden. Funktionale Zusammenhänge lassen sich nun durch Eingabe konkreter Funktionsgleichungen prüfen und visualisieren. Siehe Beispiele: Dreieckszahlen.ggb folge-arithmetisch1.ggb folge-geometrisch2.ggb

Übung 3 Muster und Folgen rationales Argumentieren

Wegen der Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen sind Abschätzungen ein bereichsspezifisches mathematisches Werkzeug bei der Untersuchung von Folgen. Dies soll am Beispiel der beiden Folgen

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

konkretisiert werden. Offenbar sind beide Folgen streng monoton wachsend. Anhand von graphischen Darstellungen läßt sich nicht entscheiden, ob h_n beschränkt oder unbeschränkt ist. Hier ist also rationales Argumentieren erforderlich!

Muster und Folgen

Maria Nelles

Beweisen Sie den fogenden Satz: [2] Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Die Beweisteile sind nicht richtig angeordnet. Finden Sie die richtige Reihenfolge:

1. Ein Trick hilft beim Abschätzen.
2. Dies ist eine „Teleskop Summe“, die durch Umklammern vereinfacht werden kann.
3. $s_{n=}$
4. $= 1 + 1 - \frac{1}{n}$
5. $= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 4} + \cdots \frac{1}{n\cdot n}$
6. ≤ 2
7. $\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$
8. $\leq 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots \frac{1}{n\cdot(n-1)}$
9. $\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$
10. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
11. $\leq 1 + \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(-\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$

Lösung: Kaballo, Einführung in die Analysis 1 S.33

Auch der Beweis des folgenden Satzes erfordert einen Trick! Beweisen Sie nun

Für n , m $\in \mathbb{N}$ und $n \geq 2^m$ gilt:

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}$$

Tipp: Schreiben Sie die Nenner der einzelnen Summanden als Potenz mit der Basis 2 und fassen Sie die Summanden geschickt zusammen, so dass die Teilsummen mit ½ abgeschätzt werden können.

Lösung zur Abschätzung der harmonischen Reihe h_n siehe Folgeseite:

[2] Vgl. W. Kaballo, Einführung in die Analysis I , 2000 Dortmund

Muster und Folgen

Maria Nelles

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2} + \ldots + 0$$

$$= 1 + \frac{m}{2}$$

Da $\mathbb{N}$ unbeschränkt ist, ist h_n also unbeschränkt. s_n konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{6}$ (Euler).

Literatur :

[Kaballo 2000] Kaballo W.: Einführung in die Analysis 1 ,Spektrum Verlag, Heidelberg 2000

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/figz1.htm

http://www.mevis-research.de/~albers/Veranstaltungen/AusgewAnw0708/Material/Zahlenfolgen_ppt.pdf

http://www.mathcampus.ch/dienstleistungen/tipps/lu9plus_3/lu9plus_3.aspx

http://www.mathematische-basteleien.de/geometrisch.htm#Graphische%20Darstellungen

http://www.mathe-cd.de/DEMO-CD/4_Analysis/40_Zahlenfolgen/40012%20Folgen%20arit%20und%20geom%20demo.pdf

http://www.mathematik.net/folgen/pdf-blumberg/folgen.pdf