FOLGEN ALS PROZESS: ALGORITHMEN

HERBERT KOCH

ZUSAMMENFASSUNG. Eine zentrale Frage der Mathematik ist die Frage nach der Existenz und der Konstruktion von Lösungen von Gleichungen. In den meisten Fällen sind nichtlineare Gleichungen einer expliziten Konstruktion von Lösungen nicht zugänglich.

Wir betrachten die Intervallhalbierung, Kontraktionen und das Newtonverfahren. Die Folgen weisen einen algorithmischen Aspekt (Wie bestimme ich Näherungswerte für anders definierte reelle Zahlen?), einen strukturellen Aspekt (wie z.B. der Mittelwertsatz) und einen argumentativen Aspekt (Was stellen wir uns unter reellen Zahlen vor?) auf.

1. INTERVALLHALBIERUNG UND ZWISCHENWERTSATZ

Gegeben seien ein Intervall $[a,b]$, eine stetige Funktion f auf dem Intervall und ein Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Wir suchen $x \in [a,b]$, das auf c abgebildet wird. In der Situation

$$f(a) \leq c \leq f(b)$$

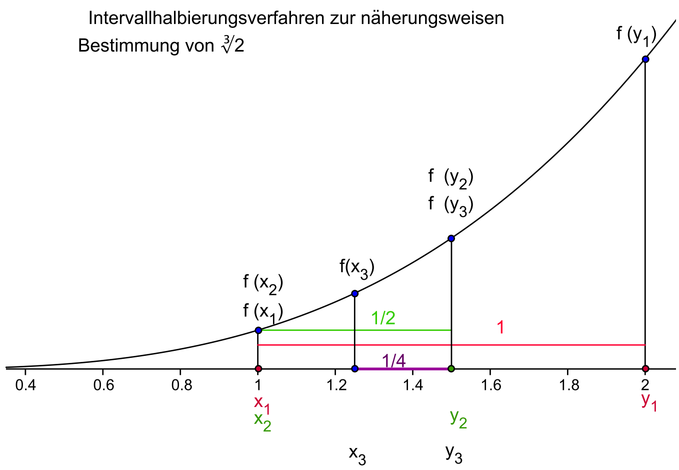
gehen wir folgendermassen vor: Wir betrachten den Wert im Mittelpunkt $(a+b)/2$. Ist

$$f((a+b)/2) > c$$

so fahren wir mit dem linken Intervall fort und setzen $x_1 = a$, $y_1 = \frac{a+b}{2}$, ansonsten mit dem rechten Intervall und $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $y_1 = b$. Wir iterieren diesen Schritt und nehmen wieder den Mittelpunkt. Die x_i und y_i konvergieren gegen einen Punkt x, an dem f den Wert c annimmt.

Übung 1. Unterrichtspraxis: Übung zum Intervallhalbierungsverfahren.

Führen Sie mit Hilfe des vorbereiteten Geogebra Applets die ersten 5 Schritte des Verfahrens zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ für $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[1,2]$ durch.



Übung 2. Argumentieren.

(1) Warum konvergieren die x_i und die y_i?
(2) Warum konvergiert $f(x_i)$ gegen c? (Hinweis: $f(x_i) \le c \le f(y_i)$. Man verwende die Stetigkeit).
(3) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.
(4) Wieviele Schritte benötigt man für $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[1,2]$, um die dritte Wurzel von 2 bis auf einen Fehler von maximal 0.001 zu bestimmen?
(5) Mit welchen Begriffen und Vorstellungen können Sie diese Sachverhalte in der Schule darstellen? Wie kann eine Argumentation in der Schule aussehen?

2. Kontraktionen

Das Kontraktionsverfahren und der zugehörige Banachsche Fixpunktsatz wurden von Stefan Banach 1922 formuliert.

Wir betrachten ein Intervall $[a,b]$ und eine Abbildung $f : [a,b] \to [a,b]$, die eine Kontraktion ist:

$$|f(x) - f(y)| \le \gamma |x-y|$$

für ein $\gamma < 1$ und alle $x, y \in [a,b]$. Mit einem beliebigen Startwert $x_0 \in [a,b]$ konstruieren wir den interativen Prozess

$$x_{i+1} = f(x_i).$$

Dann konvergiert die Folge x_i gegen einen Wert x und

$$x = f(x).$$

Übung 3. Öffnen Sie das Geogebra Applet Kontraktionsverfahren.

Im Unterricht besteht bei solchen komplexen Darstellungen oft die Gefahr, dass die Lernenden Schieberegler bewegen, daraus aber wenige mathematische Erkenntnisse gewinnen. Deshalb ist es notwendig, begleitend angemessene Schülerarbeitsaufträge zur Verfügung zu stellen.

Entwickeln Sie solche Aufgabenstellungen!

Übung 4.

(1) Begründen Sie: Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Abbildung ist wieder ein Intervall. *Hinweis: Zwischenwertsatz*. Das Bild des Intervalls $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a,b]$ ist ein Intervall der Länge höchsten $\gamma(\tilde{b} - \tilde{a})$. Für jeden Anfangspunkt konvergiert das Verfahren. Der Grenzwert ist ein Fixpunkt. *Hinweis: Intervallschachtelung*.
(2) Wir wollen die dritte Wurzel von 2 bestimmen. Dazu schreiben wir
$$x^3 = 2 \qquad x = x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{6} =: g(x)$$
Kann man das obige Verfahren anwenden?
(3) Wieviele Schritte benötigen Sie, um einen Fehler von höchsten $0,001$ zu erreichen?

3. Das Newtonverfahren

Das Newtonverfahren geht auf Isaac Newton um 1670 zurück, der es am Beispiel einer Lösung der polynomiellen Gleichung $y^3 - 2y - 5 = 0$ erklärt hat. Die heutige abstrakte Formulierung geht auf Thomas Simpson um 1750 zurück. Das Newtonverfahren und das Kontraktionsverfahren sind unverzichtbare Bausteine der Analysis und der Numerik.

Sei f eine (stetig differenzierbare) Funktion auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten den Prozess: Ausgehend von x_i bestimmen wir x_{i+1} durch

$$x_{i+1} = x_i - (f'(x_i))^{-1} f(x_i).$$

Wir hoffen, durch dieses Verfahren eine Nullstelle von f zu finden.

Verwenden Sie das Geogebra Applet zum Newtonverfahren.

Übung 5.

(1) Wieviele Schritte benötigen Sie, um die dritte Wurzel von 2 bis auf einen Fehler von 10^{-6} zu bestimmen?
(2) Testen sie $f(x) = x^3 - 2$, $f(x) = x^2 - 2$, $f(x) = e^x - 2$ und $f(x) = x^3$ mit verschiedenen Anfangswerten.
(3) Wann konvergiert das Newtonverfahren? Warum konvergiert es? *Warum existiert eine Nullstelle (Zwischenwertsatz)? Betrachten Sie die Ableitung von $x_i \to x_{i+1}$ in der Nullstelle.*
(4) Wie können Sie das Newtonverfahren in der Schule diskutieren?
(5) Öffnen Sie das Geogebra Applet Kontraktionsverfahren. Entwickeln Sie Aufgabenstellungen mit Arbeitsaufträgen für Schüler zum Geogebraapplet.

4. Vergleich der Verfahren

Die Intervallhalbierung benötigt am wenigsten Struktur und funktioniert für stetige nicht notwendig differenzierbare Funktionen. Das Kontraktionsverfahren benötigt (fast) differenzierbare Funktionen, und das Newtonverfahren im wesentlichen zweimal stetig differenzierbare Funktionen.

Die Intervallhalbierung läßt sich nicht auf zwei Dimensionen verallgemeinern. Das Suchen von Lösungen in mehr als einer Dimension ist ein hartes Problem im Sinn der Informatik.

Das Newtonverfahren funktioniert sogar in Banachräumen, und das Kontraktionsverfahren sogar in vollständigen metrischen Räumen.