Schülerinnen- und Schülerwoche 2017
– Spickzettel –

Hausdorff Center for Mathematics

September 2017

Zahlenbereiche

$\mathbb{N}$ Menge der *natürlichen Zahlen*: $1, 2, 3, 4, \dots$. Manchmal auch $0, 1, 2, 3, 4, \dots$.

$\mathbb{Z}$ Menge der *ganzen Zahlen*: $\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$.

$\mathbb{Q}$ Menge der *rationalen Zahlen*, also die Menge aller Brüche $\frac{a}{b}$ mit a und $b \in \mathbb{Z}$, wobei man $b \neq 0$ verlangt.

$\mathbb{R}$ Menge der *reellen Zahlen*, also $\mathbb{Q}$ zusammen mit den irrationalen Zahlen ($\sqrt{2}, \pi, e, \dots$).

$\mathbb{C}$ Menge der *komplexen Zahlen*, $a + ib$ mit $i := \sqrt{-1}$, sowie a und $b \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{P}$ oft verwendet als Menge der *Primzahlen.*

Mathematische Symbole aus der Mengentheorie

$x \in A$ „x ist Element von A“. Beispiel: $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$x \notin A$ „x ist nicht/kein Element von A“. Beispiel: $-1 \notin \mathbb{N}$.

$A \subseteq B$ „A ist eine Teilmenge von B“, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. Hierbei kann A auch die gesamte Menge B sein. Beispiel: $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}, \{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$A \subsetneq B$ „A ist eine echte Teilmenge von B“, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, aber A nicht die gesamte Menge B ist. Beispiel: $\{2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}, \{2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$.

$\subset$ Kann sowohl $\subseteq$ als auch $\subsetneq$ bedeuten und hängt vom Geschmack des Autors ab.

$A \nsubseteq B$ „A ist keine Teilmenge von B“, wenn es mindestens ein Element gibt, das zwar in A, aber nicht in B enthalten ist. Beispiel: $\{2, 4\} \nsubseteq \{1, 2, 3\}$.

$A \cap B$ „Der Schnitt von A und B“, ist die Menge, die alle Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B liegen. Beispiel: $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$.

$A \cup B$ „Die Vereinigung von A und B“, besteht aus allen Elementen, die in A oder in B liegen. Beispiel: $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Bemerkung Die Symbole $\cap$ und $\cup$ werden oft auch für mehr Mengen verwendet. Zum Beispiel $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ oder auch $\bigcup_{i \in I} B_i$ für die Vereinigung aller B_i mit $i \in I$. Oft nennt man I die *Indexmenge*.

$|A|$ “Kardinalität von A“, oft auch mit $\#A$ bezeichnet. Anzahl der Elemente in (der Menge) A. Beispiel: $|\{1, 4, 7\}| = 3$ und $|\mathbb{N}| = \infty$.

Mathematische Symbole aus der Logik

$\forall x \in A : \ldots$ „Für alle (Elemente) x aus A gilt die Aussage: ...“.

$\exists x \in A : \ldots$ „Es existiert mindestens ein x aus A, für das gilt: ...“.

$\nexists x \in A : \ldots$ „Es existiert kein x aus A, für das gilt: ...“

$a \wedge b$ „a und (zugleich) b“. Beispiel: Stehe 0 für „falsch“, 1 für „wahr“. Dann ist $0 \wedge 1 = 0$.

$a \vee b$, „a oder (auch) b“. Beispiel: Stehe 0 für „falsch“, 1 für „wahr“. Dann ist $0 \vee 1 = 1$.

$\neg a$ „nicht a“ ist die Negation der Aussage a. Beispiel: Bezeichnen wir mit a die Aussage

$$a = \text{Jede Zahl } x \in \mathbb{N}, \text{ ist durch zwei teilbar.},$$

dann ist die Negation

$$\neg a = \text{Es gibt eine Zahl } x \in \mathbb{N} \text{ die durch zwei und durch drei teilbar ist.}.$$

$a := b$ „Wir definieren a als b’.

Mathematische Symbole aus der Arithmetik

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ ist die Summe der $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

$\prod_{i=1}^{n} x_i$ ist das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

$p|n$ „p teilt n“, wenn p und n ganze Zahlen sind und es eine ganze Zahl k gibt mit $n = kp$.

$x \equiv y \mod p$ „x ist kongruent zu y modulo p“, wenn der ganzzahlige Rest von x und y bei der Division durch p gleich ist. Beispiel: $0 \equiv 8 \mod 2$, $5 \equiv 2 \mod 3$, $5 \not\equiv 8 \mod 7$.

Assoziativität gilt, falls $(a + b) + c = a + (b + c)$. In diesem Fall schreibt man auch $a + b + c$.

Kommutativität gilt, falls $a + b = b + a$.

Distributivität gilt, falls $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Weitere Notation

$a \Rightarrow b$ „Aus a folgt b.“ Beispiel: *n ist durch vier teilbar $\Rightarrow$ n ist durch zwei teilbar.*

$a \Leftrightarrow b$ „a gilt genau dann, wenn b gilt.“, falls sowohl $a \Rightarrow b$ als auch $b \Rightarrow a$ erfüllt ist.

$\square$, q.e.d. „quod erat demonstrandum - was zu beweisen war“. Wird oft als Symbol für das Ende eines Beweises genutzt.

$f : A \to B$ „Es ist f eine Funktion, welche die Menge A auf die Menge B abbildet“. Beispiel $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

$f : a \mapsto f(a)$ „Die Funktion f bildet a auf $f(a)$ ab“. Beispiel: Wir definieren $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $f : z \to z^2$.

gf „ist die Verkettung der Funktionen g und f.“ Die Funktion gf bildet a auf $g(f(a))$ ab.

$|x|$ ist der Betrag einer Zahl x, das heißt für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0, \\ -x & \text{, wenn } x < 0. \end{cases}$$

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann gibt es folgende Abkürzungen:

1. $[x, y] = \{z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y\}$ (d.h. die Menge aller z in $\mathbb{R}$, für die gilt: $x \leq z \leq y$).
2. $[x, y) = [x, y[= \{z \in \mathbb{R} : x \leq z < y\}$, und $(x, y] =]x, y] = \{z \in \mathbb{R} : x < z \leq y\}$.
3. $(x, y) =]x, y[= \{z \in \mathbb{R} : x < z < y\}$.